

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

~~~~~  
*Seduta del 3 marzo 1912.*

P. BLASERNA Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sul gruppo automorfo delle forme ternarie quadratiche suscettibili di rappresentare lo zero.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Si sa che il gruppo automorfo di una forma ternaria quadratica indefinita, suscettibile di rappresentare lo zero, tradotto in un gruppo Fuchsiano col principio di Poincaré <sup>(1)</sup>, dà luogo in ogni caso ad un gruppo *commensurabile* col gruppo modulare <sup>(2)</sup>. Scopo principale delle osservazioni seguenti è di far conoscere, nel caso di forme a determinante  $\Delta$  dispari e privo di fattori quadrati, una forma particolarmente semplice delle sostituzioni di siffatto gruppo, ove i coefficienti sono resi tutti interi ed il modulo della sostituzione percorre i vari divisori di  $\Delta$ , o questi divisori duplicati. La commensurabilità col gruppo modulare risulta così d'immediata evidenza, e si può inoltre calcolare subito l'area  $\Omega$  *non-euclidea* del poligono fondamentale del gruppo. Questo mi porge l'occasione di addurre una formola più generale che, sempre nel caso di  $\Delta$  dispari e privo di fattori quadrati, assegna l'area  $\Omega$  del poligono fondamentale pel gruppo automorfo di una forma qualunque (di qualunque genere).

<sup>(1)</sup> *Les fonctions Fuchsiennes et l'Arithmétique*, Journal de Mathématiques, ser. 4, tom. III (1887).

<sup>(2)</sup> Vedi. Fricke-Klein, Automorphe Functionen, Bd. I, pp. 502 e seg.

L'area  $\Omega$  del poligono fondamentale sembra invero sostituire opportunamente, per forme indefinite, il concetto di *densità* dovuto ad Eisenstein per una classe di forme definite.

Di siffatta estensione del concetto di densità e delle formole relative trovansi già un accenno nei celebri lavori di Minkowski <sup>(1)</sup>.

2. Indichiamo con

$$f_{xx} = f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,k}^{1, \dots, 3} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

una forma ternaria aritmetica (a coefficienti interi), che supponiamo indefinita ed a determinante  $\Delta$  positivo. Indichiamo ancora con

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,k} A_{ik} x_i x_k$$

la sua forma aggiunta, e facciamo inoltre uso delle notazioni

$$f_{xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_k a_{ik} x_k$$

$$F_{xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_k A_{ik} x_k.$$

Per ottenere tutte le sostituzioni ternarie

$$(1) \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

del gruppo aritmetico automorfo della forma  $f_{xx}$ , si deve procedere, come è noto, nel modo seguente <sup>(2)</sup>.

Prendansi tutte le quaderne

$$p, q_1, q_2, q_3$$

di numeri interi primi fra loro che soddisfano equazioni del tipo

$$(2) \quad p^2 + F(q_1, q_2, q_3) = \varepsilon P,$$

dove  $\varepsilon$  può essere l'unità positiva o negativa, e  $P$  percorre tutti i divisori

<sup>(1)</sup> Debbo queste informazioni alla gentilezza del prof. J. Sommer. Cfr. nelle opere di Minkowski i due passi seguenti: *Ueber positive quadratische Formen*, Bd. I, pag. 153; *Discontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz*, Bd. II, pp. 54 seg.

<sup>(2)</sup> Vedi Bachmann, *Die Arithmetik der quadratischen Formen*, 1<sup>er</sup> Abschnitt, 4<sup>es</sup> Cap.



di 4A. I coefficienti  $c_{ik}$  delle sostituzioni (1) del gruppo automorfo sono allora dati dalle formole seguenti:

$$\begin{aligned}
 (3_1) \quad & \begin{cases} P.c_{11} = p^2 - F(q_1, q_2, q_3) + 2pq_2 a_{13} - 2pq_3 a_{12} + 2q_1 F_{q_1} \\ P.c_{12} = & 2pq_2 a_{23} - 2pq_3 a_{22} + 2q_2 F_{q_1} \\ P.c_{13} = & 2pq_3 a_{32} - 2pq_3 a_{32} + 2q_3 F_{q_1} \end{cases} \\
 (3_2) \quad & \begin{cases} P.c_{21} = & 2pq_3 a_{11} - 2pq_1 a_{13} + 2q_1 F_{q_2} \\ P.c_{22} = p^2 - F(q_1, q_2, q_3) + 2pq_3 a_{21} - 2pq_1 a_{23} + 2q_2 F_{q_2} \\ P.c_{23} = & 2pq_3 a_{31} - 2pq_1 a_{33} + 2q_3 F_{q_2} \end{cases} \\
 (3_3) \quad & \begin{cases} P.c_{31} = & 2pq_1 a_{12} - 2pq_2 a_{11} + 2q_1 F_{q_3} \\ P.c_{32} = & 2pq_1 a_{22} - 2pq_2 a_{21} + 2q_2 F_{q_3} \\ P.c_{33} = p^2 - F(q_1, q_2, q_3) + 2pq_1 a_{32} - 2pq_2 a_{31} + 2q_3 F_{q_3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

I numeri  $p, q_1, q_2, q_3$  sono poi da assoggettarsi, oltre che alla equazione (2), alle condizioni (congruenze mod P) le quali esprimono che i valori dei coefficienti  $c_{ik}$  dati da queste formole (3) riescono interi.

Fra le sostituzioni del gruppo automorfo sono da distinguersi quelle con  $\varepsilon = +1$ , che diciamo di 1<sup>a</sup> specie, da quelle con  $\varepsilon = -1$  di 2<sup>a</sup> specie; nelle formole (3) esse si distinguono per ciò che le prime sono scritte con determinante  $+1$ , le seconde con determinante  $-1$ . Geometricamente queste sostituzioni danno collineazioni del piano che trasformano in sè medesima la conica  $f_{xx} = 0$ , e le due specie differiscono per ciò che nella prima specie la proiettività subordinata sulla conica è concorde, nella seconda discorde.

3. Suppongasi ora che il determinante dispari A sia privo di fattori quadrati e inoltre per la forma  $f_{xx}$  sia rappresentabile lo zero. Le forme di questo tipo costituiscono, come si sa, una sola classe e sono per ciò tutte equivalenti alla forma tipica

$$2x_1x_3 - Ax_2^2.$$

Non sarà fuor di luogo osservare che questo teorema, caso particolare di risultati generali dovuti ad A. Meyer, si può già stabilire col primo procedimento di riduzione di cui si è servito Gauss nelle *Disquisitiones Arithmeticae* (art. 272) per dimostrare che è finito il numero delle forme di un dato determinante. Poichè la forma  $f_{xx}$  rappresenta lo zero, possiamo sostituirla con una equivalente, in cui sia nullo il primo coefficiente

$$a_{11} = 0.$$

Applicando a questa una sostituzione del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  interi e  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , e prendendo  $\alpha, \gamma$  per modo che sia

$$a_{12}\alpha + a_{13}\gamma = 0,$$

risulterà nella trasformata  $f'$

$$a'_{11} = 0, \quad a'_{12} = 0.$$

Possiamo dunque già supporre in  $f$

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0,$$

onde avendosi

$$\Delta = -a_{22} \cdot a_{13}^2,$$

ed essendo per ipotesi  $\Delta$  privo di fattori quadrati, sarà

$$a_{13} = \pm 1, \quad a_{22} = -\Delta.$$

Senza alterare la generalità, potremo supporre  $a_{13} = +1$  (cangiando nel caso contrario i segni di  $x_1, x_3$ ); così

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 1, \quad a_{22} = -\Delta.$$

Dopo ciò eseguiamo una sostituzione del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con  $\alpha, \beta, \gamma$  interi arbitrari; per la forma trasformata  $f'$  avremo

$$\begin{aligned} a'_{11} &= 0, \quad a'_{12} = 0, \quad a'_{13} = 1, \quad a'_{22} = -\Delta \\ a'_{23} &= a_{23} + \alpha - \Delta\gamma, \quad a'_{33} = a_{33} - \Delta\gamma^2 + 2\beta + 2a_{23}\gamma. \end{aligned}$$

Ora, se  $a_{33}$  è pari, pongasi

$$\gamma = 0, \quad \alpha = -a_{23}, \quad \beta = -\frac{a_{33}}{2},$$

e quando  $a_{33}$  è invece dispari

$$\gamma = 1, \quad \alpha = \Delta - a_{23}, \quad \beta = -a_{23} + \frac{\Delta - a_{33}}{2};$$

così in ogni caso avremo anche

$$a'_{23} = 0, \quad a'_{33} = 0$$

e la forma proposta sarà trasformata nella equivalente

$$f = 2x_1x_3 - Ax_2^2,$$

come si voleva.

4. I gruppi automorfi di forme equivalenti essendo simili, basterà ricercare il gruppo della forma

$$2x_1x_3 - Ax_2^2.$$

Applichiamo per ciò le formole generali (3) del n. 2, osservando che qui

$$F = 2Ax_1x_3 - x_2^2.$$

La (2) diventa

$$(4) \quad p^2 + 2Aq_1q_3 - q_2^2 = \varepsilon P$$

e le (3) ci danno

$$(5) \quad \begin{cases} Pc_{11} = (p + q_2)^2, & Pc_{12} = 2Aq_3(p + q_2), & Pc_{13} = 2Aq_3^2 \\ Pc_{21} = -2q_1(p + q_2), & Pc_{22} = 2(p^2 - q_2^2) - \varepsilon P, & Pc_{23} = 2q_3(p - q_2) \\ Pc_{31} = 2Aq_1^2, & Pc_{32} = -2Aq_1(p - q_2), & Pc_{33} = (p - q_2)^2. \end{cases}$$

Il numero P, che in generale doveva percorrere i divisori di  $4A$ , qui dovrà limitarsi a percorrere i soli divisori di  $2A$ , poichè se P fosse divisibile per 4 non potrebbero riuscire interi i coefficienti  $c_{ik}$  con  $p, q_1, q_2, q_3$  primi fra loro. E infatti se P è divisibile per 4, i valori dati dalle (5) per  $c_{11}, c_{33}, c_{13}, c_{31}$  saranno interi solo quando siano pari

$$p + q_2, \quad p - q_2, \quad q_1, q_3.$$

D'altronde dalla (4), scritta sotto la forma

$$\frac{p + q_2}{2} \cdot \frac{p - q_2}{2} + 2A \frac{q_1}{2} \cdot \frac{q_3}{2} = \varepsilon \frac{P}{4},$$

dacchè  $\frac{P}{4}$  divisore di  $A$  è dispari, risulterebbero dispari

$$\frac{p + q_2}{2}, \quad \frac{p - q_2}{2},$$

e per ciò pari  $p, q_2$ , che non sarebbero dunque primi con  $q_1, q_3$ .

Dunque deve essere P un divisore di  $2A$ , e se indicheremo con

$$A = r \cdot s$$



una qualunque decomposizione di  $\mathcal{A}$  nel prodotto di  $\mathcal{A}$  di due fattori, i valori di  $P$  saranno della forma

$$P = 2^\lambda \cdot r, \text{ con } \lambda = 0, \text{ oppure } \lambda = 1.$$

Si osservi ora che dalle formole (5) per  $c_{11}, c_{33}$  risulta che  $p + q_2, p - q_2$  debbono essere divisibili per  $r$ , ed inoltre pari quando  $\lambda = 1$ ; così poniamo

$$p + q_2 = r\alpha, \quad p - q_2 = r\delta$$

con  $\alpha, \delta$  interi, che saranno inoltre ambedue pari quando  $\lambda = 1$ . Se poniamo ancora per simmetria

$$q_1 = \gamma, \quad q_3 = \beta,$$

saranno  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  quattro interi legati dall'unica relazione

$$(6) \quad r\alpha\delta + 2s\beta\gamma = \varepsilon \cdot 2^\lambda \quad (\lambda = 0, 1)$$

e inoltre dalle congruenze

$$(6^*) \quad \alpha \equiv \delta \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{quando } \lambda = 1.$$

Così effettivamente i nove coefficienti  $c_{ik}$  riescono tutti interi e presentano lo schema seguente:

$$(7) \quad \begin{pmatrix} \frac{r\alpha^2}{2^\lambda} & , & 2^{1-\lambda}\mathcal{A}\alpha\beta & , & 2^{1-\lambda}s\beta^2 \\ -2^{1-\lambda}\alpha\gamma & , & 2^{1-\lambda}r\alpha\delta - \varepsilon & , & 2^{1-\lambda}\beta\delta \\ 2^{1-\lambda}s\gamma^2 & , & -2^{1-\lambda}\mathcal{A}\alpha\gamma & , & \frac{r\delta^2}{2^\lambda} \end{pmatrix}.$$

Si osservi ora che se  $\lambda = 0$  risultano  $\alpha, \delta$  per la (6) necessariamente dispari e nello schema (7) i coefficienti della diagonale principale sono dispari, gli altri tutti pari, sicchè la sostituzione soddisfa alla congruenza (mod 2)

$$(a) \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \quad (\lambda = 0).$$

Quando invece  $\lambda = 1$ , allora  $\alpha, \delta$  sono pari per la (6\*), indi per la (6)  $\beta, \gamma$  dispari; i coefficienti della diagonale secondaria sono dispari, gli altri tutti pari, cioè

$$(a^*) \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod{2}.$$

Le sostituzioni del gruppo automorfo della forma  $2x_1x_3 - Ax_2^2$  soddisfano dunque di necessità o alla congruenza (a) o alla (a\*), come è facile dimostrare anche con considerazione diretta. Manifestamente quelle del tipo (a) formano un sottogruppo invariante d'indice 2.

5. Traduciamo ora il gruppo ternario (7) di collineazioni della conica  $2x_1x_3 - Ax_2^2 = 0$  in sè in un gruppo Fuchsiano, secondo il principio di Poincaré (metrica del Cayley).

Per questo riduciamo in primo luogo, colla sostituzione di variabili

$$2x_1 = y_1, \quad x_2\sqrt{A} = y_2, \quad x_3 = y_3$$

la forma  $2x_1x_3 - Ax_2^2$  alla forma canonica

$$y_1y_3 - y_2^2.$$

Le sostituzioni del gruppo *algebrico* riproduttivo di questa forma sono date da

$$(8) \quad \begin{cases} y'_1 = A^2y_1 + 2AB y_2 + B^2y_3 \\ y'_2 = AC y_1 + (AD + BC) y_2 + BD y_3 \\ y'_3 = C^2y_1 + 2CD y_2 + D^2y_3, \end{cases}$$

dove A, B, C, D sono costanti reali, con determinante

$$AD - BC = +1$$

per collineazioni di 1<sup>a</sup> specie, e

$$AD - BC = -1$$

per collineazioni di 2<sup>a</sup> specie.

Queste sostituzioni significano movimenti, o movimenti e simmetrie, della metrica Cayleyana e tradotte in sostituzioni lineari sulla variabile complessa  $z$ , o rispettivamente sulla coniugata  $z_0$ , diventano

$$(9) \quad \begin{cases} z' = \frac{Az + B}{Cz + D}, \quad AD - BC = +1 \quad (1^a \text{ specie}) \\ z' = \frac{Az_0 + B}{Cz_0 + D}, \quad AD - BC = -1 \quad (1^o \text{ specie}). \end{cases}$$

Se scriviamo la (8) nelle primitive variabili  $x$ , abbiamo

$$\begin{cases} x'_1 = A^2x_1 + AB\sqrt{A}x_2 + \frac{B^2}{2}x_3 \\ x'_2 = \frac{2AC}{\sqrt{A}}x_1 + (AD + BC)x_2 + \frac{BD}{\sqrt{A}}x_3 \\ x'_3 = 2C^2x_1 + 2CD\sqrt{A}x_2 + D^2x_3, \end{cases}$$

e, paragonando collo schema (7), ne deduciamo i corrispondenti valori di A, B, C, D, a meno di un cangiamento simultaneo di segno, cioè

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha\sqrt{r}}{\sqrt{2^\lambda}} \quad , \quad B = \frac{2\beta\sqrt{s}}{\sqrt{2^\lambda}} \\ C &= -\frac{\gamma\sqrt{s}}{\sqrt{2^\lambda}} \quad , \quad D = \frac{\delta\sqrt{r}}{\sqrt{2^\lambda}} . \end{aligned}$$

Sostituendo nelle formole (9), e cangiando le variabili  $z, z'$  rispettivamente in  $z\sqrt{A}, z'\sqrt{A}$ , otteniamo la seguente semplice forma delle sostituzioni del nostro gruppo Fuchsiano

$$(I) \quad z' = \frac{r\alpha \cdot z + 2\beta}{-A\gamma \cdot z + r\delta} \quad , \quad r\alpha\delta + 2s\beta\gamma = 2^\lambda \quad (\lambda = 0, 1)$$

$$(I^*) \quad z' = \frac{r\alpha z_0 + 2\beta}{-A\gamma z_0 + r\delta} \quad , \quad r\alpha\delta + 2s\beta\gamma = 2^\lambda \quad (\lambda = 0, 1)$$

colla condizione

$$\alpha \equiv \delta \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{se} \quad \lambda = 1.$$

Qui ricordiamo che  $r, s$  devono percorrere tutte le coppie corrispondenti alle decomposizioni di  $A$

$$A = rs$$

nel prodotto di due fattori.

Come si vede, le sostituzioni del gruppo hanno acquistato tutte coefficienti interi e determinante  $= \pm 2^\lambda r$  <sup>(1)</sup>.

Indichiamo con G il gruppo (Fuchsiano) di tutte le sostituzioni (V), con  $\Gamma$  il sottogruppo, invariante d'indice 2, corrispondente a  $\lambda = 0$ , in fine con H quell'ulteriore sottogruppo di  $\Gamma$  che si ottiene prendendo le sole sostituzioni con  $r = 1$ .

Le sostituzioni di H hanno la forma

$$H) \quad z' = \frac{\alpha z + 2\beta}{-A\gamma z + \delta} \quad , \quad \alpha\delta + 2A\beta\gamma = 1,$$

<sup>(1)</sup> Che le sostituzioni della forma (I), (I\*) formino gruppo si accerta con facilità direttamente. Si osserva che, componendo due tali sostituzioni corrispondenti alle decomposizioni

$$A = rs \quad , \quad A = r's',$$

la composta ha ancora la forma (I) o (I\*), e corrisponde alla decomposizione

$$A = r''s'',$$

dove  $r'' = \frac{rr'}{\sigma^2}$ , essendo  $\sigma$  il massimo comune divisore di  $r, r'$ .



ed  $H$  coincide manifestamente con quel sottogruppo congruenziale  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  del gruppo modulare  $M$ , che è definito da

$$b \equiv 0 \pmod{2} \quad c \equiv 0 \pmod{A}.$$

È facile valutare l'indice di  $H$  in  $\Gamma$  ed in  $G$ : poichè se  $A$  è il prodotto di  $n$  fattori primi diversi

$$A = p_1 p_2 \dots p_n,$$

l'indice di  $H$  in  $\Gamma$  è dato dal numero dei divisori di  $A$  ed è quindi  $= 2^n$ , onde l'indice di  $H$  in  $G$  è dato da  $2^{n+1}$ .

Così pure si determina subito l'indice di  $H$  nel gruppo modulare, che è dato da

$$3(p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_n + 1).$$

Se indichiamo poi con  $G_0, H_0, M_0$  i rispettivi gruppi ampliati da  $G, H, M$  mediante la riflessione  $z' = -z_0$  (cioè col considerare insieme alle (I) anche le (I\*)), sarà  $H_0$  sottogruppo comune di  $G_0, M_0$  ed avrà nel primo l'indice  $= 2^{n+1}$  e nel secondo l'indice dato da

$$3(p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_n + 1).$$

Così è posta perfettamente in evidenza la commensurabilità del gruppo automorfo per le forme ternarie suscettibili di rappresentare lo zero col gruppo modulare.

6. Una forma ternaria indefinita qualunque  $f$  ha un gruppo automorfo infinito, al quale appartiene, nella metrica del Cayley, un determinato *polygono fondamentale*. Se, per fissare le idee, prendiamo  $= -1$  la curvatura della metrica iperbolica del Cayley, l'area  $\Omega$  del poligono fondamentale è perfettamente determinata. Il valore di  $\Omega$ , che è un attributo comune a tutte le forme della classe  $C$  di  $f$ , si assumerà come misura della *densità* della classe. Questo si giustifica colle osservazioni seguenti.

Le forme della classe  $C$  si ottengono applicando ad  $f$  le infinite sostituzioni ternarie unimodulari, ma ciascuna forma si trova ripetuta un numero infinito di volte, corrispondentemente alle infinite sostituzioni del gruppo automorfo, cioè ai singoli poligoni equivalenti della rete in cui le sostituzioni del gruppo dividono l'interno della conica assoluto. La classe  $C$  è dunque da riguardarsi tanto più densa in forme quanto più è ristretto il gruppo, vale a dire quanto più grande è l'area  $\Omega$  del poligono fondamentale.

Sembra dunque naturale di assumere  $\Omega$  come misura della densità della classe.

Tornando ora alla forma annullantesi

$$2x_1x_3 - x_2^2$$

è facile valutare qui  $\Omega$ , o come scriveremo  $\Omega_{G_0}$  per significare l'area del poligono fondamentale di  $G_0$  <sup>(1)</sup>. Poichè  $H_0$  è sottogruppo d'indice  $2^{n+1}$  in  $G_0$ , sarà

$$\Omega_{G_0} = \frac{1}{2^{n+1}} \Omega_{H_0},$$

ed essendo d'altra parte  $H_0$  sottogruppo d'indice  $3(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1)$  nel gruppo modulare ampliato  $M_0$ , sarà

$$\Omega_{H_0} = 3(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1) \cdot \Omega_{M_0}.$$

Ma il triangolo fondamentale di  $M_0$  ha, come è ben noto, gli angoli  $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ , onde

$$\Omega_{M_0} = \pi \left( 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{6},$$

e sostituendo abbiamo per la densità cercata

$$(II) \quad \Omega = \frac{\pi}{2^{n+2}} (p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1).$$

Questa formola, così stabilita per via elementare, non è che un caso particolare delle formole che danno la densità  $\Omega$  per una classe qualunque di forme ternarie indefinite, analoghe alle ben note di Eisenstein per le forme definite.

Così per es. se supponiamo soltanto che il determinante  $A$  sia dispari e privo di fattori quadrati:

$$A = p_1, p_2, \dots, p_n,$$

è noto che esistono  $2^n$  generi corrispondenti alle possibili determinazioni dei caratteri

$$\left( \frac{-F}{p_1} \right), \left( \frac{-F}{p_2} \right), \dots, \left( \frac{-F}{p_n} \right),$$

<sup>(1)</sup> In generale per un gruppo qualunque  $K$  indicheremo con  $\Omega_K$  l'area del poligono fondamentale.

e in ciascun genere esiste una sola classe. Introducendo ancora il carattere supplementare o derivato

$$E = \left( \frac{-F}{p_1} \right), \left( \frac{-F}{p_2} \right), \dots \left( \frac{-F}{p_n} \right),$$

la densità  $\Omega$  della classe (area del poligono fondamentale) è data dalla formola

$$(III) \quad \Omega = \frac{(2+E)\pi}{3 \cdot 2^{n+2}} \left\{ p_1 + \left( \frac{-F}{p_1} \right) \right\} \cdot \left\{ p_2 + \left( \frac{-F}{p_2} \right) \right\} \dots \left\{ p_n + \left( \frac{-F}{p_n} \right) \right\}.$$

Quando la classe è quella delle forme suscettibili di rappresentare lo zero, tutti i caratteri sono eguali a  $+1$  e la (III) si riduce alla (II). La dimostrazione della formola (III) e delle analoghe nel caso generale si può trarre dalle citate ricerche di Minkowski, applicando i metodi analitici di Dirichlet.

Qui ci limiteremo ad osservare che nei dieci esempî di poligoni fondamentali calcolati da Fricke per forme *non annullantesi*, da pp. 554 a 565 del 1° volume delle *Automorphe Functionen*, la formola (III) dà esattamente l'area del poligono corrispondente.

Così per es. per la forma

$$f = 3x_1^2 - 5x_2^2 - x_3^2$$

si ha

$$A = 15, \quad F = 5x_1^2 - 3x_2^2 - 15x_3^2$$

$$n = 2, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad \left( \frac{-F}{3} \right) = \left( \frac{-5}{3} \right) = +1$$

$$\left( \frac{-F}{5} \right) = \left( \frac{3}{5} \right) = -1,$$

indi  $E = -1$  e la (III) dà

$$\Omega = \frac{\pi}{3}.$$

Il poligono fondamentale, calcolato da Fricke, è un quadrilatero con tre angoli eguali a  $\frac{\pi}{2}$  ed uno eguale a  $\frac{\pi}{6}$ ; la sua area è dunque in effetto

$$\pi \left( 2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

**Matematica.** — *Sulle superficie minime cerchiate di Riemann.*

Nota del Socio L. BIANCHI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.



Chimica fisica. — *Ricerche sulla radioattività delle acque sorgive del Monte Amiata ed esperienze sulla dispersione atmosferica della regione.* Nota del Socio R. NASINI e di C. PORLEZZA.

Le ricerche sulla radioattività delle acque furono iniziate da Sella e Pochettino <sup>(1)</sup>, i quali da alcune osservazioni fatte sull'acqua Marcia delle condutture della città di Roma dedussero la probabile presenza di un'emanazione radioattiva nell'acqua stessa. Poco dopo venivano fatte analoghe osservazioni da J. J. Thomson <sup>(2)</sup> a Cambridge e da Himstedt <sup>(3)</sup> in Germania.

In seguito le misure di radioattività sulle acque andarono estendendosi specialmente in riguardo alle acque minerali, portando alla conclusione che quasi tutte le sorgenti minerali sono più o meno radioattive. Per ciò che concerne le ordinarie acque di fonte, le quali specialmente hanno importanza per le nostre ricerche, le esperienze sono in molto minor numero, ed eccezzuata l'osservazione succitata di Pochettino e Sella, non sappiamo, per quanto è a nostra conoscenza, che analoghe ricerche siano state intraprese in Italia.

Fuori di qui invece le esperienze sono state feconde di risultati copiosi e inaspettati, e ci sembra opportuno passare brevemente in rassegna le ricerche compiute in varie parti d'Europa sulle comuni acque sorgive, adibite sia ad uso pubblico che privato.

Nel 1905 Henrich <sup>(4)</sup> e Schmidt <sup>(5)</sup> intrapresero, e poi continuarono, numerose osservazioni su alcune sorgenti d'acqua dolce del Tauno, dalle quali emerse che molte di tali sorgenti, e altre dei dintorni di Wiesbaden, erano anche più radioattive delle acque minerali omonime.

In seguito F. Dienert ed E. Bouquet <sup>(6)</sup> trovarono debolmente radioattive alcune acque potabili da loro esaminate; Muñoz del Castillo <sup>(7)</sup> riscontrò fortemente attive alcune sorgenti del fiume Lerez; i suoi dati però (10.000 volt per ora) non sono confrontabili con altri, perchè non risulta quali fossero le costanti degli apparecchi usati.

Nel 1908 Repin <sup>(8)</sup> trovò fortemente radioattive le acque di Danne e alcune delle Alpi: queste ultime devono la loro attività principalmente a

<sup>(1)</sup> Rendiconti Accad. Lincei, 11, pag. 527 (1902).

<sup>(2)</sup> Phil. Mag. 1902.

<sup>(3)</sup> Ann. der Phys. 13, pag. 673 (1904).

<sup>(4)</sup> Zeit. f. ang. Ch. 17, pag. 3.

<sup>(5)</sup> Phys. Zeit., 6, pag. 34 (1905), e 8, pag. 107 (1907).

<sup>(6)</sup> Comptes Rendus, 142, pag. 449.

<sup>(7)</sup> Anales de la Soc. Española de Fis. y Quim., ottobre 1907 e novembre 1907.

<sup>(8)</sup> Comptes Rendus, 147, pag. 387 e 703 (1908).

radiatorio. Pure nel 1908 Hj. Sjögren ed N. Sahlbohm <sup>(1)</sup> studiando la radioattività di acque svedesi trovarono che alcune sorgenti di Stoccolma possedevano la rilevante attività di 32 unità Mache, e che anche le acque di alcuni pozzi scavati nel granito erano fortemente radioattive (in media 22.7 unità Mache).

Bamberger <sup>(2)</sup> esaminando la radioattività di parecchie sorgenti austriache, specialmente nei dintorni di Tannbach e del Semmering, riscontrò per le sorgenti più forti, un'attività anche maggiore: 47-52 unità Mache. Così pure Wellik <sup>(3)</sup> trovò radioattive le acque di alcune sorgenti di Gratz e dintorni (6.24-12.9 unità Mache) provenienti da gneis; la radioattività però oscillava a seconda delle condizioni meteorologiche.

Nel 1910 Artmann e Friedler <sup>(4)</sup> eseguirono esperienze sull'acqua della città di Reichenberg e trovarono, come valore medio, 4.9 unità Mache; Dienert e Guillerd <sup>(5)</sup> trovarono notevolmente radioattive le sorgenti della Voulzie, del Durteint e dei dintorni di Provins. Müller <sup>(6)</sup> riscontrò una attività di circa 8 unità Mache nelle acque di alcuni pozzi di Mühlhausen; J. Satterly <sup>(7)</sup> trovò radioattive le acque del Cam e della condotta di Cambridge, riscontrando anche che tali acque contengono disciolte sostanze radioattive (oltre l'emanazione).

Meritano infine speciale menzione le estese ricerche di Schiffner <sup>(8)</sup> sulle acque della Sassonia, dalle quali scaturì che in tale regione si ha un grandissimo numero di acque radioattive e che tra queste alcune, specie quelle provenienti da rocce uranifere, possiedono attività eccezionalmente elevate.

Ora che l'efficacia di acque radioattive per scopi terapeutici è stata osservata in molti casi, sebbene sia difficile determinarne l'effetto quantitativo, poichè altre cause — contenuto in sali, situazione climatica, speciali metodi di cura, ecc. — concorrono certamente ad ottenere i risultati osservati, dovevano apparirci interessanti le ricerche, che andiamo ad esporre, fatte su acque purissime, sgorganti dalla viva roccia e per di più appartenenti ad una regione — quella del Monte Amiata — già nota come stazione climatica saluberrima e vivificante.

Le acque del Monte Amiata sono celebrate per la loro copia e per la purezza e freschezza loro, e con ammirazione ne parla già Pio II nei suoi Commentari. Esse hanno un piccolissimo residuo fisso, che di poco supera

<sup>(1)</sup> Centralblatt f. Ch., 1908, I, pag. 1084.

<sup>(2)</sup> Centralblatt f. Ch., 1909, I, pag. 399.

<sup>(3)</sup> Centralblatt f. Ch., 1909, I, pag. 1087.

<sup>(4)</sup> Centralblatt, 1910, I, pag. 2135.

<sup>(5)</sup> Le Radium, 1910, pag. 60.

<sup>(6)</sup> Phys. Zeit., 11, pag. 545 (1910).

<sup>(7)</sup> Centralblatt, 1910, II, pag. 1723.

<sup>(8)</sup> Radioaktive Wässer in Sachsen, 1908, 1909 e 1911.

gr. 0.1 per litro, per alcune è inferiore e scende sino a gr. 0.05 e anche meno. Una buona parte di questo residuo è costituito da silice. Questo va detto per le acque che sgorgano dalle rocce trachitiche, perchè quelle che provengono da rocce sottostanti alla trachite, pure essendo in generale eccellenti, sono più ricche in residuo fisso e in sali di calcio. Dalle acque del Monte Amiata è alimentata la città di Grosseto e presto lo sarà quella di Siena. Il loro studio dal lato chimico fu in gran parte eseguito dal prof. Fausto Sestini.

Lo studio della radioattività delle acque del Monte Amiata si riconnette poi a vari problemi di geologia chimica dei quali è nostra intenzione di trattare in una prossima Nota.

Le presenti esperienze sono state fatte sul posto durante il mese di settembre del 1911 ed hanno fornito risultati inaspettati, mostrando che moltissime delle acque che scaturiscono in quella parte della Toscana sono radioattive non solo, ma che la loro attività è dell'ordine di quella delle più reputate acque minerali.

Le nostre ricerche si sono rivolte anche alle rocce da cui queste acque vengono fuori; e inoltre abbiamo cercato di completarle con alcune misure di dispersione atmosferica.

Prima di esporre i risultati cui siamo giunti, crediamo opportuno dare un breve cenno dei dispositivi e degli apparecchi impiegati.

I. *Misure riguardanti la radioattività delle acque.* — Per queste esperienze usammo, introducendovi solo qualche leggera modificazione, l'apparecchio di Henrich <sup>(1)</sup>; principalmente si cercò di rendere possibili anche le misure di radioattività che non potessero eseguirsi sul posto, e a tale scopo si fece in modo che il recipiente destinato a contenere l'acqua in esame potesse, una volta raccolto il campione, venire ermeticamente chiuso (per evitare qualsiasi perdita) e al momento della misura connesso coll'apparecchio senza bisogno di fare comunicare il contenuto coll'esterno.

Il metodo seguito fu quello di Henrich, di determinare cioè accuratamente la capacità delle singole parti dell'apparecchio e, di volta in volta, il volume del recipiente usato per contenere l'acqua e quello del campione d'acqua prelevato. Il calcolo si fece colla formula di Henrich, tenendo conto ogni volta della dispersione normale (ottenuta cioè con acqua distillata) e della radioattività indotta sulle pareti dell'apparecchio di misura. Questo era costituito da un elettroscopio Elster e Geitel della capacità di 145 cm. con campana da 9300 cm.<sup>3</sup>; la circolazione dell'aria nell'apparecchio veniva prolungata per circa 5 minuti.

Nella Tabella I sono esposti i risultati delle nostre misure; accanto alla designazione di ogni sorgente abbiamo segnato la località in cui essa

<sup>(1)</sup> Zeit. f. ang. Ch., 1910, pag. 340.



si trova, la temperatura (in genere la temperatura esterna all'ombra era di circa 25°), la dispersione corretta come si è detto e l'attività in unità Maché calcolata colla nota formula:

$$\frac{1000 \times D \times C}{300 \times 3600}$$

dove  $D$  è la dispersione quale è stata data nella colonna relativa e  $C$  è la capacità (14.5 cm.) dell'elettroscopio.

Siccome poi lo stesso elettroscopio con annessa campana è stato usato per altre ricerche <sup>(1)</sup>, sappiamo che in tale apparecchio 1 volt-ora di dispersione corrisponde a  $0,0373 \times 10^{-10}$  mm.<sup>3</sup> d'emanazione; abbiamo quindi potuto dare nell'ultima colonna della Tabella stessa la quantità d'emanazione (in mm.<sup>3</sup>) che è contenuta in un litro dell'acqua esaminata.

A tale Tabella abbiamo poi fatto seguire qualche indicazione che potesse servire da sommario schiarimento.

II. *Radioattività delle rocce.* — Per queste ricerche si è adoperato l'elettroscopio di cui sopra (capacità 14.5 cm.) e si sono usati in generale gr. 125 di sostanza.

Nella Tabella II riportiamo i risultati da noi ottenuti e, in aggiunta, alcuni dati precedentemente ottenuti da uno di noi <sup>(2)</sup>. Facciamo osservare che non si tratta che di esperienze preliminari.

III. *Misure di dispersione atmosferica.* — Fu usato un contaioni di Ebert con elettroscopio della capacità di 18.75 cm. La quantità d'aria aspirata è, in tale apparecchio di 50 l. al minuto primo. In genere la misura si prolungò per 10'. L'elettroscopio venne costantemente caricato negativamente.

La Tabella III riporta i risultati da noi ottenuti in tali ricerche. Su queste misure non abbiamo molto da osservare: solo richiamiamo l'attenzione sopra i valori elevati ottenuti alla sorgente del fiume Fiora, dove è da credersi che si abbia, per il gorgogliamento dell'acqua, una forte quantità d'emanazione; lo stesso è a dirsi per quelli avuti nel casotto della sorgente del Crognolo. Riguardo ai valori più bassi ci asteniamo per ora da ogni considerazione.

<sup>(1)</sup> Rend. Lincei, vol. XX, 2° sem., pag. 338 (1911).

<sup>(2)</sup> R. Nasini e M. G. Levi, Gazz. Chim. It., XL, parte II (1910).

TABELLA I.

Radioattività delle acque.

| DENOMINAZIONE<br>DELLA SORGENTE                                                       | Località             | Temperatura | Dispersione<br>corretta<br>colla formula<br>di<br>Henrich<br>Volt-ora-litro | Attività<br>in<br>unità<br>Mache | Quantità<br>d'emanazione<br>contenuta<br>in 1 litro d'acqua<br>mm. <sup>3</sup> |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-------------|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 1. 1 <sup>a</sup> polla della sorgente<br>del Crògnolo . . . . .                      | Casteldelpiano       | 10.5        | 188.0                                                                       | 2.524                            | $7.01 \times 10^{-10}$                                                          |
| 2. Acqua del Crògnolo al<br>bottino di distribuzione                                  | id.                  | 11.5        | 185.1                                                                       | 1.814                            | $5.04 \times "$                                                                 |
| 3. Acqua presa alla fonte<br>di piazza Garibaldi e<br>portata in brocca . . .         | id.                  | 12.5        | 37.6                                                                        | 0.505                            | $1.40 \times "$                                                                 |
| 4. 1 <sup>a</sup> polla del Crògnolo<br>dopo abbondante piog-<br>gia . . . . .        | id.                  | 10.5        | 185.2                                                                       | 2.486                            | $6.91 \times "$                                                                 |
| 5. 1 <sup>a</sup> polla del Crògnolo<br>dopo 5 giorni dal pre-<br>levamento . . . . . | id.                  | —           | 87.                                                                         | 1.168                            | $3.24 \times "$                                                                 |
| 6. 1 <sup>a</sup> polla del Crògnolo<br>bollita . . . . .                             | id.                  | —           | inattiva                                                                    | —                                | —                                                                               |
| 7. Sorgente di Muristaldo                                                             | id.                  | 11.5        | 211.0                                                                       | 2.833                            | $7.87 \times "$                                                                 |
| 8. Fonte della Casella . .                                                            | id.                  | 11.5        | 329.0                                                                       | 4.417                            | $12.27 \times "$                                                                |
| 9. Acque calde . . . . .                                                              | id.                  | 17.5        | 153.4                                                                       | 2.059                            | $5.72 \times "$                                                                 |
| 10. Acqua delle Buche . .                                                             | id.                  | 15.5        | 6.9                                                                         | 0.093                            | $0.26 \times "$                                                                 |
| 11. Burlana . . . . .                                                                 | id.                  | 10          | 294.6                                                                       | 3.955                            | $10.99 \times "$                                                                |
| 12. Acque Arbure . . . . .                                                            | id.                  | 7.5         | 276.6                                                                       | 3.714                            | $10.32 \times "$                                                                |
| 13. Bugnano . . . . .                                                                 | id.                  | 8.5         | 493.3                                                                       | 6.623                            | $18.40 \times "$                                                                |
| 14. S. Biagio . . . . .                                                               | id.                  | 13          | 121.7                                                                       | 1.634                            | $4.54 \times "$                                                                 |
| 15. Acqua Capenti . . . .                                                             | Arcoisosso           | 13.5        | 584.7                                                                       | 7.850                            | $21.81 \times "$                                                                |
| 16. Lanificio . . . . .                                                               | id.                  | 11          | 231.2                                                                       | 3.104                            | $8.62 \times "$                                                                 |
| 17. Fonte del Poeta . . .                                                             | id.                  | 11.5        | 21.9                                                                        | 0.294                            | $0.82 \times "$                                                                 |
| 18. Acqua della Madonna                                                               | id.                  | 13.5        | 14.1                                                                        | 0.189                            | $0.53 \times "$                                                                 |
| 19. Acqua dei Bagnòli . .                                                             | Bagnòli              | 21.5        | 507.7                                                                       | 6.816                            | $18.93 \times "$                                                                |
| 20. Acqua di Seggiano . .                                                             | Seggiano             | 11.5        | 110.7                                                                       | 1.486                            | $4.13 \times "$                                                                 |
| 21. Acqua Forte . . . . .                                                             | Bagnore              | 21.5        | inattiva                                                                    | —                                | —                                                                               |
| 22. Polla di Sotto . . . .                                                            | id.                  | 19.5        | 270.4                                                                       | 3.630                            | $10.09 \times "$                                                                |
| 23. Acqua degli Ontani<br>(portata in brocca) . .                                     | —                    | —           | 58.0                                                                        | 0.779                            | $2.16 \times "$                                                                 |
| 24. Peschiera . . . . .                                                               | Santa Fiora          | 11.5        | 313.5                                                                       | 4.209                            | $11.69 \times "$                                                                |
| 25. Fonte di Castello . . .                                                           | id.                  | 11.5        | 535.0                                                                       | 7.183                            | $19.95 \times "$                                                                |
| 26. Acqua del Marroneto                                                               | id.                  | 14          | 122.8                                                                       | 1.649                            | $4.58 \times "$                                                                 |
| 27. Famelico . . . . .                                                                | Bagnore              | 12.5        | 683.0                                                                       | 9.170                            | $25.48 \times "$                                                                |
| 28. Piscinello . . . . .                                                              | Montagna             | 8.5         | 433.6                                                                       | 5.822                            | $16.17 \times "$                                                                |
| 29. Fonte delle Monache                                                               | id.                  | 7.5         | 417.8                                                                       | 5.619                            | $15.58 \times "$                                                                |
| 30. Fonte del Giogo . . .                                                             | Bagnòlo              | 12.5        | 474.3                                                                       | 6.368                            | $17.69 \times "$                                                                |
| 31. Saragiolo . . . . .                                                               | id.                  | 11.5        | 261.2                                                                       | 3.507                            | $9.74 \times "$                                                                 |
| 32. Vene . . . . .                                                                    | Pian Castagnaio      | 11.5        | 350.6                                                                       | 4.707                            | $13.08 \times "$                                                                |
| 33. Bagno degli Ebrei . .                                                             | id.                  | 12.5        | 169.3                                                                       | 2.273                            | $6.31 \times "$                                                                 |
| 34. Acqua delle Puzzole                                                               | Bagnore              | 23          | inattiva                                                                    | —                                | —                                                                               |
| 35. Acqua del Bottino . .                                                             | Abbadia S. Salvatore | 8.5         | 351.5                                                                       | 4.719                            | $13.11 \times "$                                                                |
| 36. Sorgente dell'Eremic-<br>cio . . . . .                                            | Vivo                 | 7.8         | 112.9                                                                       | 1.516                            | $4.21 \times "$                                                                 |
| 37. Acqua gialla . . . . .                                                            | —                    | 8           | 120.0                                                                       | 1.611                            | $4.48 \times "$                                                                 |
| 38. Fonte di Capo Vetra . .                                                           | Montagna             | 7.5         | 247.9                                                                       | 3.328                            | $9.25 \times "$                                                                 |
| 39. Sambuco . . . . .                                                                 | —                    | 7.5         | 370.2                                                                       | 4.970                            | $13.81 \times "$                                                                |

INDICAZIONI SULLE ACQUE E SULLE ESPERIENZE

DELLA TABELLA PRECEDENTE.

1. Questa sorgente fornisce l'acqua agli abitanti di Casteldelpiano. È protetta da un casotto in muratura (nell'interno del quale fu preso il campione) dal quale parte il condotto che va al paese.

2. Questa misura fu fatta sulla stessa acqua prendendo il campione nel punto in cui detto condotto arriva al bottino donde viene distribuita alle varie fonti pubbliche.

3. Tale esperienza fu eseguita unicamente per avere un'idea della perdita in emanazione che subiva l'acqua prima di venire effettivamente utilizzata dagli abitanti di Casteldelpiano.

4. Questa misura aveva per iscopo di accertare l'influenza delle vicende meteorologiche sulla sorgente.

5. Da questa determinazione scaturisce che l'emanazione disciolta nell'acqua è quella del radio. (Il valore teorico è un po' più basso, cioè circa 75 volt-ora).

6. Il risultato di questa esperienza è che la radioattività dell'acqua è dovuta a emanazione di radio disciolta e non a sostanze radioattive sciolte nell'acqua.

7. Questa sorgente sbocca per mezzo di una galleria sotterranea in una vasca, e poi al disotto di questa forma uno zampillo che ha la temperatura di 10°.5; l'acqua per l'esperienza fu prelevata dalla vasca.

8. È l'acqua che una volta serviva agli abitanti di Casteldelpiano, ed è in parte incondottata. Campione preso alla cannella.

9. L'acqua scaturisce dal terreno; il campione fu preso alla sorgente.

10. Nella località in cui fu presa l'acqua, esiste un laghetto e attorno ad esso esistono le cave di terra gialla: campione prelevato vicino alla sponda.

11. Ha parte del suo percorso sotterraneo; il campione fu preso all'uscita. È posta in montagna.

12. Quest'acqua viene mandata a Grosseto: essendo chiuso il casotto in muratura, il campione fu prelevato ad una bocca da cui si scarica l'acqua eccedente.

13. È situata in montagna; sgorga dalla viva roccia; il campione fu preso alla sorgente.

14. È adibita ad uso pubblico. Campione preso alle cannelle.

15. È la sorgente che fornisce l'acqua ad Arcidosso; nel casotto in muratura costruito alla sorgente esiste una lunga galleria con un fosso cen-



trale (in muratura) nel quale vengono effettivamente a riunirsi le acque di diverse sorgenti; il campione fu preso a metà circa della galleria.

16. Questa sorgente esce dalla viva roccia. Campione preso alla sorgente.

17. Id. id. Id. id.

18. L'acqua di questa polla è in parte incondottata e adibita ad uso pubblico. Campione preso alle cannelle.

19. Alla sorgente, le cui proprietà terapeutiche sono da gran tempo note, è stato costruito un casotto in muratura, la parete di fondo del quale è costituita dalla roccia da cui scaturisce e sulla quale scorre l'acqua; questa è debolmente ferruginosa. Campione preso alla sorgente.

20. Questa sorgente fornisce l'acqua al paese di Seggiano; nel casotto in muratura v'è una galleria alla quale convergono altre due destinate a raccogliere l'acqua di due sorgenti distinte. Il campione fu prelevato alla confluenza delle due sorgenti.

21. Questa polla, utilizzata a scopo terapeutico da lungo tempo, e che viene detta anche acqua acidula delle Bagnore, scaturisce in una casetta all'uopo costruita, ed è protetta da un piccolo bottino dal quale poi esce l'acqua; dalla sorgente esce anche parecchio gas (prevalentemente  $\text{CO}_2$ ); l'acqua è ferruginosa, ma non è molto abbondante (litri 2.64 al minuto).

22. Questa sorgente è adibita ad uso pubblico. Il campione fu preso alle cannelle.

23. Quest'acqua fu esaminata perchè, a differenza di tutte le altre, non scaturisce da rocce trachitiche.

24. Questa importante e grandiosa polla costituisce la sorgente del fiume Fiora; è anche adibita ad uso pubblico; il campione fu preso vicinissimo alla sorgente.

25. Serve per uso pubblico. Campione prelevato alle cannelle.

26. Id. id. Id. id.

27. La sorgente è quasi alla base di un ponte in muratura della strada provinciale, ma scaturisce dalla roccia. Campione preso alla sorgente.

28. È posta in alta montagna (regione dei faggi) e scaturisce dalla trachite; non è però abbondante (litri 2.33 al minuto).

29. Come 28; un po' più abbondante.

30. Viene utilizzata dagli abitanti delle Bagnore; campione preso alla sorgente.

31. Adibita ad uso pubblico; campione preso alle cannelle.

32. È assai copiosa e sorge in una piccola conca (sbocco delle Vene) assieme ad altre minori. Campione preso alla sorgente.

33. Scaturisce dalla viva roccia. Campione prelevato alla sorgente.

34. Sorge a poca distanza dalla strada provinciale, ed è accompagnata da forte sviluppo di  $\text{CO}_2$  ed  $\text{H}_2\text{S}$ . Campione preso alla sorgente.

35. È l'acqua potabile di Abbadia S. Salvatore. Il campione fu preso a una bocca di scarico dell'acqua eccedente dal bottino.

36. Questa immensa sorgente è quella la cui acqua verrà mandata a Siena. Il campione è stato preso ad una polla non ancora incondottata, ma assai copiosa.

37. Sul letto del fossetto in cui scorre l'acqua si deposita ferro; sorge nella regione dei faggi. Campione preso alla sorgente.

38. Scaturisce anche questa in alta montagna. Campione preso alla sorgente.

39. Id. id. id. id.

TABELLA II.

Radioattività di materiali solidi.

| DENOMINAZIONE DELLA ROCCIA                                                            | Dispersione<br>osservata<br>Volt-ora | Corrente<br>di saturazione<br>in Ampère |
|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1. Terra gialla (Casteldelpiano) . . . . .                                            | inattivo                             | —                                       |
| 2. Terra rossa (in strati sottostanti alla precedente (Castel-<br>delpiano) . . . . . | inattivo                             | —                                       |
| 3. Noduli grafitici nella trachite . . . . .                                          | 5.3                                  | $23.7 \times 10^{-12}$                  |
| 4. Deposito ferruginoso dell'acqua del Crògnolo (Castel-<br>delpiano) . . . . .       | inattivo                             | —                                       |
| 5. Calcare . . . . .                                                                  | inattivo                             | —                                       |
| 6. Sasso occluso nella trachite di Monte Amiata. . . . .                              | 13.7                                 | $61 \times "$                           |
| ROCCIE ESAMINATE DAI PROF. NASINI E LEVI                                              |                                      |                                         |
| 1.Trachite di Monte Amiata . . . . .                                                  | 19                                   | $85 \times "$                           |
| 2.Tufo di Monte Amiata . . . . .                                                      | 45                                   | $201 \times "$                          |
| 3.Terra gialla (Arcidosso) . . . . .                                                  | 16                                   | $71 \times "$                           |

TABELLA III.

Misure di dispersione atmosferica.

| LOCALITÀ                                                                                                                   | Dispersione       | Numero                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-----------------------------------------|
|                                                                                                                            | in<br>Volt-minuto | di ioni positivi<br>p. cm. <sup>2</sup> |
| 1. Al balcone del Laboratorio di Chimica Generale (Pisa) .                                                                 | 0.86              | 1350                                    |
| 2. Sul terrazzino della casa del prof. Nasini (Casteldelpiano)                                                             | 0.80              | 1103                                    |
| 3. Accanto al casotto della sorgente del Crògnolo id.                                                                      | 0.82              | 1176                                    |
| 4. Dentro id. id. id. . . . .                                                                                              | 0.488             | 1794                                    |
| 5. Id. id. id. dei Bagnòli (Bagnòli) . . . . .                                                                             | 0.885             | 1415                                    |
| 6. Sul muricciolo costeggiante il laghetto formato dalla sorgente della Fiora (punto vicino alla sorgente) . . . . .       | 0.732             | 2691                                    |
| 7. Sul muricciolo costeggiante il laghetto formato dalla sorgente della Fiora (punto più lontano dalla sorgente) . . . . . | 0.60              | 2205                                    |
| 8. Accanto alla casetta dell'acqua Forte . . . . .                                                                         | 0.305             | 1121                                    |
| 9. Dentro allo steccato delle acque Arbure. . . . .                                                                        | 0.29              | 1066                                    |
| 10. Accanto alla sorgente Bugnano . . . . .                                                                                | 0.26              | 956                                     |
| 11. Id. id. Piscinello . . . . .                                                                                           | 0.285             | 1048                                    |
| 12. Nello « Sbocco delle Vene » (Piancastagnaio) . . . . .                                                                 | 0.22              | 808                                     |
| 13. Ad Abbadia S. Salvatore (lungo la strada provinciale)                                                                  | 0.28              | 1029                                    |
| 14. Alla sorgente dell'Eremicciòlo (Vivo) . . . . .                                                                        | 0.192             | 706                                     |

Da quanto precedentemente è stato esposto risulta la notevole attività delle acque del Monte Amiata, radioattività, ripetiamo, tanto più notevole in quanto si tratta di comuni acque sorgive; la radioattività delle rocce non è invece molto elevata, anzi il contrasto tra la forte attività delle acque e quella relativamente piccola dei materiali solidi invita a interessanti studi, che ci proponiamo di intraprendere, insieme ad una ricerca qualitativa, ed eventualmente quantitativa delle emanazioni a breve periodo che, oltre a quella di radio, potessero trovarsi disciolte nell'acqua.

Infine rileviamo che oltre alle acque più importanti che noi abbiamo esaminato altre moltissime minori ve ne sono che per essere della stessa regione (uscenti da rocce trachitiche), o perchè vicinissime ad altre radioattive, fanno ritenere che anch'esse siano attive.

Ancora una volta poi mettiamo in rilievo come tale proprietà debba avere, anche in tali paesi, conseguenze importantissime dal punto di vista della medicina e dell'igiene.



**Paleontologia.** — *Sopra un delfinorinco del calcare miocene di Lecce (Ziphiodelphis Abeli Dal Piaz).* Memoria del Socio F. BASSANI e del dott. A. MISURI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

**Matematica.** — *Sulle equazioni integrali di terza specie di Émile Picard.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio C. SEGRE.

In una recente Memoria (ser. 3<sup>a</sup>, tomo 18, pag. 459 degli Annales de l'École Normale Supérieure) il sig. Picard si occupa di alcuni nuovi tipi di equazioni integrali che egli chiama di terza specie. Si tratta di equazioni del Fredholm del tipo

$$(1) \quad A(x) f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy = \psi(x),$$

dove  $f(x)$  è la funzione incognita. Posto

$$(2) \quad A(x) f(x) = F(x), \text{ donde } f(x) = \frac{F(x)}{A(x)},$$

la (1) diventa:

$$(3) \quad F(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \frac{F(y)}{A(y)} dy = \psi(x);$$

la quale è una ordinaria equazione del Fredholm, se  $A(x)$  non si annulla nell'intervallo  $(a, b)$ . Il sig. Picard esamina il caso che  $A(x)$  possieda un numero finito di *zeri* (semplici) in tale intervallo; e osserva che un tale studio è immediata generalizzazione di quello, a cui conduce l'ipotesi che  $A(x)$  possieda un solo infinitesimo (semplice) nell'intervallo  $(a, b)$ . Cosicché in sostanza l'equazione studiata dal sig. Picard è

$$(4) \quad F(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{K(x, y)}{y} F(y) dy = \psi(x).$$

Egli pone per una funzione  $\varphi(y)$

$$(5) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(y)}{y} dy = \lim_{\varepsilon, \eta=0} \left\{ \int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(y)}{y} dy + \int_{-1}^{-\eta} \frac{\varphi(y)}{y} dy \right\}.$$

Ed è ben evidente che, se  $\frac{\varphi(y) - \varphi(0)}{y}$  è integrabile nell'intervallo  $(-1, +1)$ , l'integrale definito dalla precedente equazione <sup>(1)</sup> (5) è funzione lineare della costante

$$(6) \quad C = \lim_{\varepsilon, \eta=0} \log \frac{\eta}{\varepsilon},$$

supposto che  $\varepsilon$  ed  $\eta$  tendano a zero in modo che questa costante esista e sia finita.

Per studiare la (4) il Picard suppone di essere nel campo delle funzioni analitiche; e, partendo dalla classica formola del Fredholm, ne trova il limite per  $\varepsilon = \eta = 0$ ,  $C = \lim \log \frac{\eta}{\varepsilon}$ , usando i noti teoremi sugli integrali curvilinei di funzioni di variabile complessa.

Scopo di questa Nota è di dimostrare che lo studio di (4) si riduce con metodo *affatto elementare* allo studio di una ordinaria equazione del Fredholm, pure abbandonando l'ipotesi, fondamentale nella Mem. del sig. Picard, della analiticità di  $K(x, y)$ . Anzi il metodo da noi seguito dimostra che equazioni con singolarità di tipo più elevato si possono trattare in modo perfettamente analogo.

Se  $\varphi(x)$  è una qualsiasi funzione, porremo  $\delta\varphi = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$ .

Supponiamo <sup>(2)</sup> che  $\delta F$  sia integrabile all'intervallo  $(-1, +1)$ . Dalle (5), (6) deduciamo

$$(7) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{F(y)}{y} dy = F(0) \lim_{\varepsilon, \eta=0} \left\{ \int_{\varepsilon}^1 \frac{dy}{y} + \int_{-1}^{-\eta} \frac{dy}{y} \right\} + \\ + \int_{-1}^{+1} \delta F(x) dx = CF(0) + \int_{-1}^{+1} \delta F dx.$$

<sup>(1)</sup> Si ha da (5) che  $\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(y)}{y} dy = \int \frac{\varphi(y) - \varphi(0)}{y} dy + \varphi(0) \lim_{\varepsilon, \eta=0} \log \frac{\eta}{\varepsilon}$ .

<sup>(2)</sup> Salvo a verificarlo più tardi, perchè per ora  $F(x)$  è incognita. In altre parole noi cerchiamo soltanto quelle soluzioni  $F(x)$  di (3), per cui  $\delta F$  è integrabile.

Se ne deduce:

1°) Se  $F(0) = 0$ , il valore  $B$  di  $\int_{+1}^{+1} \frac{F(y)}{y} dy$  è perfettamente determinato, e non dipende dal valore di  $C$ .

2°) Se  $F(0) \neq 0$ , noi possiamo far acquistare a  $\int_{-1}^{+1} \frac{F(y)}{y} dy$  quel valore  $B$  che più ci piace, scegliendo opportunamente la costante  $C$ .

Poniamo  $K(x, y) = k(x) + y H(x, y)$ ; poniamo cioè:

$$k(x) = K(x, 0) ; H(x, y) = \frac{1}{y} \{ K(x, y) - K(x, 0) \} ,$$

e supponiamo  $k(x)$  ed  $H(x, y)$  finite e continue nell'intervallo  $(-1, +1)$ . Basterebbe del resto supporre che  $H(x, y)$  sia un nucleo (Kern), a cui è applicabile la teoria del Fredholm. La (4) diventa con le notazioni ora adottate:

$$(8)_1 \quad F(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} H(x, y) F(y) dy = \psi(x) - B k(x),$$

$$(8)_2 \quad B = \int_{-1}^{+1} \frac{F(y)}{y} dy .$$

Alle soluzioni  $F(x)$  di (8) differenti da zero per  $x = 0$  corrisponde una soluzione  $f(x)$  di (1) che ha un infinito del primo ordine in tale punto; alle soluzioni  $F(x)$  nulle per  $x = 0$  corrisponde <sup>(1)</sup> (se  $F(x)$  è in tale punto infinitesimo almeno di primo ordine) una soluzione  $f(x)$  di (1) regolare anche per  $x = 0$ .

Siano  $\pi(x, \lambda)$  e se  $\kappa(x, \lambda)$  le soluzioni trovate (per es. col metodo del Fredholm) delle:

$$(9)_1 \quad \pi(x, \lambda) + \lambda \int_{-1}^{+1} H(x, y) \pi(y, \lambda) dy = \psi(x),$$

$$(9)_2 \quad \kappa(x, \lambda) + \lambda \int_{-1}^{+1} H(x, y) \kappa(y, \lambda) dy = k(x) .$$

Dalla (8) si dedurrà che per valori non eccezionali di  $\lambda$  è:

$$(10) \quad F(x) = \pi(x, \lambda) - B \kappa(x, \lambda) \text{ } ^{(2)} .$$

<sup>(1)</sup> In virtù di (2), ove si ponga  $x = A(x)$ .

<sup>(2)</sup> Affinchè  $\delta F$  sia integrabile, e siano leciti i calcoli seguenti, basta che  $\delta \pi$  e  $\delta \kappa$



Distinguiamo ora due casi:

1°) Si voglia che  $F(0) = 0$ . Le (8)<sub>2</sub> e (10) diventano

$$(11)_1 \quad \pi(0, \lambda) - B x(0, \lambda) = 0,$$

$$(11)_2 \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\pi(x, \lambda)}{x} dx - B \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{x(x, \lambda)}{x} dx + 1 \right\} = 0,$$

supposto che questi integrali esistano. Le (11) sono compatibili soltanto in uno dei seguenti casi:

$\alpha_1$ ) Le (11) si riducono a identità; cioè:

$$(12)_1 \quad 0 = \pi(0, \lambda) = x(0, \lambda) = \int_{-1}^{+1} \frac{\pi(x, \lambda)}{x} dx = 1 + \int_{-1}^{+1} \frac{x(x, \lambda)}{x} dx.$$

In tal caso a B si può dare un valore arbitrario; *esistono*  $\infty^1$  *soluzioni* (10) di (4), *che sono funzioni lineari intere di un parametro B. E non vi è altra soluzione di (4).* Tali soluzioni si riducono ad una soltanto quando  $x(x, \lambda) = 0$ , ossia  $k(x) = K(x, 0) = 0$ .

$\alpha_2$ ) Almeno una delle (11) è un'equazione non identica; e nessuna delle (11) è contraddittoria (ciò che avverrebbe se per es.  $x(0, \lambda) = 0$  e  $\pi(0, \lambda) \neq 0$ ). In tal caso le (11) sono compatibili soltanto se

$$\pi(0, \lambda) \left\{ 1 + \int_{-1}^{+1} \frac{x(x, \lambda)}{x} dx \right\} = x(0, \lambda) \int_{-1}^{+1} \frac{\pi(x, \lambda)}{x} dx,$$

ossia se:

$$(12)_2 \quad \pi(0, \lambda) = \int_{-1}^{+1} \frac{x(0, \lambda) \pi(x, \lambda) - \pi(0, \lambda) x(x, \lambda)}{x} dx$$

dove, nelle nostre ipotesi, l'integrale del secondo membro è perfettamente determinato.

*In questo caso le (11) determinano univocamente la B; e la (4) possiede una sola soluzione nulla per  $x = 0$ .*

*Se poi  $H(x, y) - H(0, y)$ ,  $\psi(x) - \psi(0)$ ,  $k(0)$  sono infinitesimi almeno del primo ordine per  $x = 0$ , altrettanto avverrà per le (9) di*

---

siano integrabili, ossia, per le (9), che  $\delta\psi, \delta k, \frac{H(x, y) - H(0, y)}{x}$  siano funzioni integrabili.

$\pi(x, \lambda) - \pi(0, \lambda)$  e di  $\kappa(x, \lambda) - \kappa(0, \lambda)$ . Cosicchè alle funzioni  $F(x)$  ora determinate in  $(\alpha_1)$ ,  $(\alpha_2)$  corrispondono soluzioni  $f(x)$  di (1) regolari anche per  $x = 0$ . Come si deduce da quanto abbiamo detto (eccettuato il caso che una delle (11) sia contraddittoria) l'esistenza di tali soluzioni per la (1) è caratterizzata dall'essere soddisfatta l'equazione (12)<sub>2</sub>.

In modo perfettamente simile si studierebbero i valori di  $\lambda$  eccezionali per le equazioni integrali (7).

2°) Si voglia che  $F(0) \neq 0$ . In tale caso la B può, come dicemmo, ricevere un valore qualsiasi; e tutte le soluzioni della (3) sono date dalla (10), in cui alla B si dia un valore qualsiasi, eccettuati i valori  $B = E$  per cui

$$(13) \quad \pi(0, \lambda) - E \kappa(0, \lambda) = 0$$

perchè, se B riceve un tal valore E, sarebbe  $F(0) = 0$ .

$\beta_1$ )  $\pi(0, \lambda) = \kappa(0, \lambda) = 0$ . La (13) è una identità; tutte le possibili soluzioni  $F(x)$  di (3) sono nulle per  $x = 0$ . Siamo ricondotti al caso già studiato.

$\beta_2$ )  $\pi(0, \lambda) \neq 0$ ;  $\kappa(0, \lambda) = 0$ . La (13) non è soddisfatta da alcuna E; e le funzioni  $F(x)$  cercate (cfr. la (10)) sono funzioni lineari intere di un parametro B, che può ricevere un valore arbitrario.

$\beta_3$ )  $\kappa(0, \lambda) \neq 0$ . In tal caso ancora le  $F(x)$  cercate sono funzioni lineari intere di un parametro B, il quale può ancora ricevere un valore arbitrario, eccettuato però il valore  $E = \frac{\pi(0, \lambda)}{\kappa(0, \lambda)}$  definito dalla (13).

OSSERVAZIONE. — Si noti che per (7), (10) è:

$$B = C [\pi(0, \lambda) - B \kappa(0, \lambda)] + \int_{-1}^{+1} \delta \pi dx - B \int_{-1}^{+1} \delta \kappa dx;$$

la quale relazione tra i parametri B, C permette di rendere più intuitivi i precedenti risultati; ed anzi per ogni valore di B determina generalmente la corrispondente costante C, ossia il modo di annullarsi dell'intervallo  $(-\eta, \epsilon)$ .

Questi risultati si possono, con metodo siffatto simile, estendere a singolarità di tipo più elevato. Supponiamo per es. che nella (3) sia:

$$A(y) = y^3, \quad K(x, y) = K(0, 0) + x^3 h(x) + y^3 k(y) + x^3 y^3 H(x, y);$$

$$\psi(x) = \psi(0) + x^3 \varphi(x),$$

ove  $h(x)$ ,  $k(y)$ ,  $H(x, y)$ ,  $\varphi(x)$  siano per es. finite e continue nel solito intervallo.

La (3) si scriverà:

$$\begin{aligned} F(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} \{ h(y) + x^3 H(x, y) \} F(y) dy = \\ = \psi(0) + x^3 \varphi(x) - [K(0, 0) + x^3 h(x)] \int_{-1}^{+1} \frac{F(y)}{y^3} dy. \end{aligned}$$

Ne segue che necessariamente dovremo supporre  $F(x) = F(0) + x^3 G(x)$ , dove la  $G(x)$  è finita. Posto quindi

$$B = \int_{-1}^{+1} F(y) \frac{dy}{y^3} = \int_{-1}^{+1} G(x) dx + F(0) C,$$

ove

$$C = \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon, \eta=0} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\eta^2} \right),$$

la trattazione continua come sopra.

**Matematica.** — *Sull'integrabilità delle funzioni di due variabili.* Nota del dott. LUCIANO ORLANDO, presentata dal Corrispondente A. DI LIEGE.

È noto da parecchio tempo che una funzione  $f(x, y)$ , la quale sia continua in  $x$  per ogni  $y$  fisso, e continua in  $y$  per ogni  $x$  fisso, può benissimo non essere continua nelle due variabili considerate insieme. Tale è, per esempio, una funzione che valga zero nell'origine, e valga  $\frac{xy}{x^2 + y^2}$  in ogni altro punto del piano. Sulla retta fissa  $y = mx$ , anche nelle più immediate vicinanze dell'origine, la funzione conserva costantemente il valore  $\frac{m}{1 + m^2}$ , dunque è (tranne che sugli assi) radialmente discontinua.

Non altrettanto felice è, per verità, l'esempio  $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$ , dato da alcuni autori.

Ma noi non vogliamo qui insistere sopra cose ben note; vogliamo piuttosto esporre alcune considerazioni, che s'inquadrano in ricerche molto più complicate ed estese, sulle quali ha richiamato la mia attenzione il valente scienziato prof. G. Giorgi.

Costruiremo una funzione  $f(x, y)$ , delle due variabili  $x, y$ , la quale, pur essendo integrabile (secondo Riemann) in  $dx$  per ogni  $y$  fisso, ed in  $dy$  per ogni  $x$  fisso, non si presta tuttavia all'integrazione doppia.



Consideriamo un quadrato, che abbia un vertice nell'origine, e il vertice opposto nel punto di coordinate 1, 1. Definiamo una funzione  $F(x, y)$  come segue:

a) Sia nulla sui lati, ed in ogni punto interno che abbia almeno una coordinata irrazionale;

b) Nei punti interni  $x = \frac{m}{n}$ ,  $y = \frac{p}{q}$  (frazioni supposte irriducibili) essa valga  $\frac{n}{q}$  per  $n \leq q$ , e valga  $\frac{q}{n}$  per  $n \geq q$ .

Allora, fissato  $y = \frac{p}{q}$ , la funzione  $F\left(x, \frac{p}{q}\right)$ , della variabile  $x$ , è evidentemente integrabile in  $dx$ ; essa è infatti in condizioni d'integrabilità più vantaggiose di una funzione  $\varphi(x)$  destinata ad assumere, nell'intervallo  $(0, 1)$ , il valore zero per ogni  $x$  irrazionale, e il valore  $\frac{q}{p}$  per ogni  $x$  razionale  $= \frac{\mu}{\nu}$  (frazione supposta irriducibile). Ora è nota e manifesta l'integrabilità Riemanniana di questa funzione.

Si dimostra facilmente che la funzione  $F(x, y)$  è discontinua in ogni punto del quadrato. In un quadratino arbitrariamente piccolo, interno al quadrato, esistono punti con valori irrazionali di  $x$  e di  $y$ , ed ivi  $F(x, y)$  è zero. Esiste poi sempre, nell'interno del quadratino, uno almeno fra due punti che hanno le rispettive coordinate del tipo

$$x_1 = \frac{2h-1}{2^n}, \quad y_1 = \frac{2k-1}{2^n}; \quad x_2 = \frac{2h+1}{2^n}, \quad y_2 = \frac{2k+1}{2^n},$$

dove  $F(x, y)$  vale 1. Basterà che  $n$  sia abbastanza alto.

La funzione  $F(x, y)$ , simmetrica nelle due variabili  $x, y$ , che abbiamo ora costruita, verifica le relazioni

$$\int_0^1 F\left(x, \frac{p}{q}\right) dx = 0 \quad \int_0^1 F\left(\frac{m}{n}, y\right) dy = 0$$

e, più generalmente,

$$\int_0^1 F(x, y) dx = 0 \quad \int_0^1 F(x, y) dy = 0,$$

e poi

$$\int_0^1 dx \int_0^1 F(x, y) dy = 0 \quad \int_0^1 dy \int_0^1 F(x, y) dx = 0;$$

eppure non esiste l'integrale doppio Riemanniano

$$\iint F(x, y) dx dy$$

esteso alla superficie del quadrato.

Ripeto che ciò s'inquadra in ricerche, più estese, di calcolo funzionale, che il prof. Giorgi mi ha cortesemente accennate.

**Meccanica celeste. — Sulle orbite periodiche.** Nota di LEO-  
NIDA TONELLI, presentata dal Socio SALVATORE PINCHERLE.

1. — L'orbita periodica  $C_1$ , la cui esistenza fu da noi stabilito nella Nota precedente <sup>(1)</sup>, per le sue proprietà di minimo, non può avere punti multipli interni ad A. La cosa è evidente. Ma non ne può avere neppure sul contorno. Infatti, con un ragionamento da noi usato in una Nota, di prossima pubblicazione, sulle soluzioni discontinue del calcolo delle variazioni, si vedrebbe facilmente che i vari rami di  $C_1$ , passanti per un punto multiplo, dovrebbero avere in tal punto tutti la stessa tangente, e questo è impossibile <sup>(2)</sup>, perchè su tutto A è sempre  $\sqrt{U+h} > 0$  ed anche  $F_1 > 0$  <sup>(3)</sup>.

2. — È importante osservare che la curva  $L_1$  non deve necessariamente essere costituita di un sol pezzo. *La proposizione del n. 3 vale anche se la  $L_1$  risulta formata da due o più curve continue, chiuse, aventi le proprietà di cui al n. citato.* Anche in questo caso non possono esistere punti multipli su  $C_1$ .

3. — È facile vedere che la  $C_1$  non può avere su  $L_1$  e  $L_2$  che un numero finito di punti. Infatti, se su  $L_1$  ( $L_2$ ) ne avesse un numero infinito (costituenti necessariamente un gruppo chiuso) e P fosse un punto limite di essi, su P la sua curvatura sarebbe uguale a quella di  $L_1$  ( $L_2$ ). Risultando così verificata la disuguaglianza  $T < 0$  ( $> 0$ ) non potrebbe essere verificata la 3),  $T = 0$ .

4. — La proporzione del n. 3 sussiste anche nei seguenti casi:

1°) *Se invece delle disuguaglianze  $T < 0$ ,  $T > 0$ , in un gruppo riducibile di punti di  $L_1$  e  $L_2$  è verificata la  $T = 0$ .*

2°) *Se in un gruppo pure riducibile, le coordinate dei punti di  $L_1$ ,  $L_2$ , considerate come funzioni dell'arco, mancano di derivate seconde, oppure queste non sono continue.*

3°) *Se in un numero finito di punti di  $L_1$  e  $L_2$ , manca la tangente; purchè però in ognuno di tali punti esistano e siano continue le tangenti ai due rami della curva che concorrono in essi, e l'angolo di questi rami, che appartenne ad A, sia minore di  $\pi$ .*

Tutto ciò scende immediatamente da quanto abbiamo dimostrato nella Nota di cui si è fatto cenno al n. 1.

<sup>(1)</sup> L. Tonelli, *Sulle orbite periodiche* (Questi Rendiconti, 1° sem., pag. 251).

<sup>(2)</sup> Cfr. Bolza, *Lectures on the Calculus of Variations*, 1904 (Chicago), pag. 125.

<sup>(3)</sup> Ricordiamo che è  $F_1 = \frac{F x' x'}{y'^2} = \dots$  con  $F = \sqrt{U+h} \sqrt{x'^2 + y'^2}$ .

5. — Sia, ancora,  $L_1$  una curva chiusa tale che le due coordinate, come funzioni dell'arco, siano continue insieme alle loro derivate dei primi due ordini. In prossimità di  $L_1$  e per tutti i punti esterni a tale curva, *la*  $U(xy) + h$  *sia positiva*, ed inoltre, continua insieme alle due derivate parziali dei primi due ordini. *Sia poi*

$$(4) \quad \lim_{R=\infty} R \sqrt{U(x, y) + h} = \infty,$$

dove  $R$  indica la distanza del punto  $(x, y)$ , nel quale si calcola la  $\sqrt{U + h}$ , dall'origine delle coordinate. Allora  
se sulla  $L_1$  è sempre

$$T \equiv 2 \frac{U + h}{e} - \frac{\partial U}{\partial n} < 0,$$

esiste certamente un'integrale periodico dell'equazione differenziale  $T = 0$ , ossia un'orbita periodica per il problema dinamico considerato.

Quest'orbita circonda la curva  $L_1$ .

Sia  $\bar{L}$  una qualunque curva continua, rettificabile, che circonda  $L_1$ , e si indichi con  $N$  un numero positivo maggiore dell'integrale

$$\int_{\bar{L}} \sqrt{U + h} ds.$$

In base alla (4) è possibile determinare un numero positivo  $R_1$ , tale che per ogni  $R \geq R_1$  sia

$$(5) \quad R \sqrt{U + h} > N.$$

Questo  $R_1$  lo sceglieremo in modo che il cerchio  $(O, R_1)$ , avente il centro nell'origine degli assi ed il raggio uguale a  $R_1$ , contenga nel suo interno tutta la curva  $L_1$ . Sia, ora,  $L'$  una curva continua, chiusa, rettificabile, circondante la  $L_1$  ed avente un punto sulla circonferenza  $(O, R_2)$ , con  $R_2 > 2R_1$ . La lunghezza di quella parte di  $L'$  che trovasi nella corona circolare limitata dalle circonferenze  $(O, R_1)$ ,  $(O, R_2)$ , è di certo maggiore di  $2(R_2 - R_1)$ ; e il contributo di questa parte nell'integrale

$$\int_{L'} \sqrt{U + h} ds$$

è, per la (5) maggiore di

$$2(R_2 - R_1) \frac{N}{R_2}.$$

Si ha così

$$(6) \quad \int_{L'} \sqrt{U + h} ds > 2(R_2 - R_1) \frac{N}{R_2} = 2N - 2N \frac{R_1}{R_2} > N.$$



Ciò posto, consideriamo tutte le curve continue chiuse, rettificabili, appartenenti al campo limitato dalla curva  $L_1$  e dal cerchio  $(O, R_2)$ , e circondate  $L_1$ . Ripetendo le considerazioni già fatte al n. 4 della Nota I, si dimostra subito che fra esse ve n'è almeno una  $C_1$  che rende minimo l'integrale di  $\sqrt{U+h}$ . Con ragionamenti identici a quelli dei nn. 6 e 7 della stessa Nota si dimostra poi che la curva  $C_1$  soddisfa all'equazione differenziale  $T=0$  in tutti i punti *interni* al campo qui considerato ed anche in quelli appartenenti a  $L_1$ . E osservando che la  $C_1$  non può avere punti sulla circonferenza  $(O, R_2)$  — perchè, se ne avesse uno solo, sarebbe per la (6)

$$\int_{C_1} \sqrt{U+h} ds > N > \int_L \sqrt{U+h} ds,$$

contro l'ipotesi che la  $C_1$  dia il minimo per l'integrale di  $\sqrt{U+h}$  — si conclude che tutta la curva  $C_1$  soddisfa all'equazione differenziale  $T=0$ . La proposizione enunciata è quindi pienamente stabilita —.

6. — Nel numero precedente, non solo abbiamo stabilito l'esistenza di almeno un'orbita periodica, ma abbiamo anche determinato un cerchio dentro il quale deve certamente trovarsi una di tali orbite.

7. — Per la proporzione dimostrata al n. 5 possono ripetersi osservazioni analoghe a quelle dei nn. 1, 2, 3, 4.

8. — *Tutte le orbite delle quali qui si è stabilita l'esistenza, sono, secondo un teorema del Poincaré, orbite instabili di prima categoria* (Ved. H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*; T. III pag. 232).

**Meccanica celeste. — Determinazione matematica dello schiacciamento polare di Giove.** Nota dell'ing. GIUSEPPE ARMELLINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

#### INTRODUZIONE.

È noto che le osservazioni dirette, eseguite fin qui sullo schiacciamento polare di Giove, sono riuscite un poco discordanti. Prendendo per unità il semidiametro equatoriale, la misura del semidiametro polare oscilla dal valore 0,941 del Kaiser al valore 0,934 dell'Herschel. Nel 1892 il Barnard scoprì un nuovo satellite di Giove situato tanto vicino al pianeta principale da essere trascurabili le perturbazioni prodotte nel suo moto dall'attrazione del Sole e degli altri satelliti; e il Cohn (*Astr. Nach.*, 3403) vide subito la possibilità di risalire dalle sue perturbazioni alla determinazione mate-

matica dello schiacciamento in questione <sup>(1)</sup>; ma a quanto mi risulta nessuno s'era fin qui accinto all'opera.

Io mi sono servito della teoria classica di Laplace semplificandola però con l'ammettere che la superficie di Giove sia superficie d'equilibrio, ed ho spinto l'approssimazione molto al di là di quel che abbia fatto il Laplace nella teoria degli antichi satelliti, tenendo anche conto del secondo termine della funzione perturbatrice dovuta allo schiacciamento polare. Le formole a cui giungo sono molto complicate, perchè per maggiore esattezza conservo anche le seconde potenze dell'eccentricità. Il risultato è il seguente:

- a) Media delle osservazioni . . . . . 0,9378
- b) Valore calcolato del semidiametro polare . . . 0,9377

Nella deduzione matematica, che si fa con altro metodo, dello schiacciamento terrestre dalle ineguaglianze lunari non si giunge a valori tanto precisi <sup>(2)</sup>.

#### EQUAZIONI FONDAMENTALI.

Consideriamo Giove come un ellissoide di rotazione e siano A il semidiametro equatoriale e B il semidiametro polare; quanto alla densità interna supporremo:

- a) che la superficie esterna del pianeta sia superficie d'equilibrio;
- b) che la distribuzione interna delle masse sia simmetrica rispetto al piano equatoriale e identica per tutte le sezioni meridiane.

Prendiamo il centro di Giove come origine d'una terna di assi ortogonali  $x, y, z$ , tali che il piano  $xy$  sia parallelo al piano dell'eclittica di una data epoca: l'asse  $x$  sia diretto verso l'equinozio di primavera, e l'asse  $z$  verso il polo nord dell'eclittica stessa; chiamando con  $M$  la massa di Giove

<sup>(1)</sup> Il Cohn lascia inoltre supporre che dalle perturbazioni del satellite possa un giorno dedursi la distribuzione delle masse nell'interno di Giove; ciò che sarà sempre impossibile con questo solo dato. Cfr. su questo proposito la Nota del prof. Lauricella: *Sulla distribuzione delle masse nell'interno dei pianeti* (R. Acc. Lincei, XXI, 1), dove il ch. autore dimostra che anche tenendo conto del moto interno al baricentro, resta sempre nel  $1^o$   $q$  una funzione arbitraria  $\pi$ .

Notiamo anche: il Cohn tentò effettivamente la determinazione dello schiacciamento in questione, ma avendo adoperato un metodo troppo grossolano (data specialmente la piccola distanza che separa il satellite del pianeta) giunse ad un risultato che non è in accordo con le osservazioni.

<sup>(2)</sup> La bibliografia del V satellite è estesa. Citiamo: Tisserand, C. Rendus, CXVII e CXIX; Cohn *Bestimmung der Bahnelemente des V Jupitersmondes*, Astr. Nach., 3403; Barnard, *On the fifth satellite of Jupiter*, Astr. Journal 544; Dobbin, *Orbit of the fifth satellite of Jupiter*, ibid., 562; ecc.

e con  $\mu$  la massa del satellite, il potenziale esercitato da Giove nel punto ov'è il satellite sarà

$$P = f \frac{M}{r} + R,$$

essendo  $R$  un termine correttivo molto piccolo dovuto al non essere il pianeta perfettamente sferico ed omogeneo.

Ciò posto è noto che, essendo  $M$  estremamente grande di fronte a  $\mu$ , le equazioni differenziali del moto del satellite saranno con grandissima approssimazione

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + fM \frac{x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + fM \frac{y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} + fM \frac{z}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial z} \end{cases}$$

Trascurando dapprima le derivate di  $R$  integreremo il sistema (1) introducendo le sei note costanti del moto  $a e \varphi \omega \varepsilon$  (distanza media, eccentricità, inclinazione, longitudine del nodo ascendente, longitud. del perigiove, epoca); faremo poi variare queste costanti in modo da tener conto dei secondi membri. Adoperando metodi noti, vediamo che  $a$  e ed  $\omega$  soddisfano alle equazioni

$$(2) \quad \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$$

$$(3) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e},$$

$$(4) \quad \frac{de}{dt} = -\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} - (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1-(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

dove  $n = \frac{\sqrt{fM}}{a^{\frac{3}{2}}}$  è il moto medio.

#### SVILUPPO DELLA FUNZIONE PERTURBATRICE.

Cerchiamo ora l'espressione di  $R$  (funzione perturbatrice) per mezzo dei sei noti elementi e del tempo. Se adottiamo per il momento un sistema di coordinate polari, prendendo per origine il centro di Giove e per asse po-

lare l'asse di rotazione, sviluppando P in funzioni sferiche abbiamo:

$$P = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}}$$

dove, per l'ipotesi b), si ha, com'è noto,  $Y_{2k+1} = 0$ . Essendo poi  $Y_0 = Mf$  abbiamo

$$(5) \quad R = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{Y_{2m}}{r^{2m+1}}.$$

Il Laplace nella teoria degli antichi satelliti di Giove, mostra essere sufficiente il considerare solo il primo termine della (5); ma noi per maggiore esattezza calcoleremo con approssimazione anche il secondo. E intanto l'ipotesi a) ci dice che  $Y_2$  dipende soltanto dalla forma esterna di Giove, dalla sua massa e dal rapporto  $\chi$  tra la forza centrifuga e la gravità all'equatore (rapporto noto trattandosi di un pianeta che ha satelliti e di cui si conosce il diametro equatoriale e la durata di una rotazione) e che precisamente chiamando con  $\delta$  l'angolo che il raggio vettore, che unisce il centro di Giove col satellite, forma col piano equatoriale, si ha <sup>(1)</sup>:

$$Y_2 = MfA^2 \left( \frac{A-B}{A} - \frac{1}{2}\chi \right) \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \delta \right).$$

Chiamando ora con  $y_4$  il valore di  $Y_4$  nel caso di Giove omogeneo porremo con approssimazione  $y_4 = Y_4$  ciò che non altera la (5) considerando il piccolo coefficiente  $\frac{1}{r^5}$  per cui  $Y_4$  viene moltiplicato. Abbiamo allora indicando con  $\rho$  la densità media di Giove <sup>(2)</sup>:

$$Y_4 = \frac{4\pi\rho f}{35} \left[ \frac{35}{8} \sin^4 \delta - \frac{15}{4} \sin^2 \delta + \frac{3}{8} \right] A^2 \left( \frac{A^2 - B^2}{A^2} \right)^2 \left( 1 - \frac{A^2 - B^2}{A^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Eliminiamo ora  $\delta$ : chiamando perciò con  $\Phi$  e  $\theta$  l'inclinazione e la longitudine del nodo ascendente dell'equatore di Giove abbiamo con grandissima approssimazione data la piccolezza di  $\delta$  e  $\varphi$

$$\begin{aligned} \delta &= \varphi \sin(nt - \vartheta) - \Phi \sin(nt - \theta) \\ \delta^2 &= \varphi^2 \sin^2(nt - \vartheta) + \Phi^2 \sin^2(nt - \theta) - 2\Phi\varphi \sin(nt - \vartheta) \sin(nt - \theta) = \\ &= \varphi^2 \left[ \frac{1 - \cos 2(nt - \vartheta)}{2} \right] + \Phi^2 \left[ \frac{1 - \cos 2(nt - \theta)}{2} \right] - \\ &\quad - 2\Phi\varphi [\cos(\theta - \vartheta) - \cos(2nt - \theta - \vartheta)]. \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Tisserand, *Mécan. cel.*, II, 210.

<sup>(2)</sup> Tisserand, op. cit., II, 322.



Si ha pure <sup>(1)</sup>

$$(6) \quad \left(\frac{r}{a}\right)^{-m} = 1 + \frac{(m-1)m}{(1)^2} \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{(1.2)^2} \left(\frac{e}{2}\right)^4 + \dots$$

+ termini periodici.

Essendo nostro scopo lo studiare le perturbazioni secolari dobbiamo attenerci soltanto ai termini non periodici. Elimineremo la  $f$  mediante la

$$Mf = n^2 a^3;$$

ed essendo  $e$  e  $\varphi$  quantità molto piccole ne tralasceremo le potenze superiori alla seconda. Indicando allora con  $R_s$  l'insieme dei termini secolari contenuti in  $R$ , e ponendo per brevità  $\theta - \vartheta = \beta$  avremo con facili calcoli:

$$(7) \quad R_s = A^2 \left( \frac{A-B}{A} - \frac{1}{2} \chi \right) n^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} \Phi^2 + \Phi \varphi \cos \beta \right) +$$

$$+ \frac{3e\pi n^2}{70Ma^2} (1 + 5e^2) \left[ 1 - 10 \left( \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\Phi^2}{2} - \Phi \varphi \cos \beta \right) \right] \times$$

$$\times A^7 \left( \frac{A^2 - B^2}{A^2} \right)^2 \left( 1 - \frac{A^2 - B^2}{A^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

formola dove entrano solo gli elementi ellittici e gli elementi determinativi dell'equatore di Giove.

#### EQUAZIONE DELLE PERTURBAZIONI.

Sostituendo questo valore di  $R$  nelle (2) (3) e nella (4) abbiamo:

$$(8) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{n \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{a^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{3e\pi}{7Ma^2} (1 + 5e^2) (\Phi \cos \beta - \varphi) \times \right.$$

$$\times A^7 \left( \frac{A^2 - B^2}{A^2} \right)^2 \left( 1 - \frac{A^2 - B^2}{A^2} \right)^{\frac{1}{2}} + A^2 \left( \frac{A-B}{A} - \frac{1}{2} \chi \right) (\Phi \cos \beta - \varphi) \left. \right\} +$$

$$+ \frac{n(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2} \left\{ \frac{3e\pi}{7Ma^2} \left[ 1 - 10 \left( \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\Phi^2}{2} - \Phi \varphi \cos \beta \right) \right] \times \right.$$

$$\times A^7 \left( \frac{A^2 - B^2}{A^2} \right)^2 \left( 1 - \frac{A^2 - B^2}{A^2} \right)^{\frac{1}{2}} + A^2 \left( \frac{A-B}{A} - \frac{1}{2} \chi \right) \left. \right\},$$

$$(9) \quad \frac{da}{dt} = 0 \quad \Bigg/ \quad a = \text{costante}$$

$$(9') \quad \frac{de}{dt} = 0. \quad e = \text{costante}$$

La (9) ci dice che l'asse maggiore dell'orbita ellittica non ha perturbazioni secolari di prim'ordine ciò ch'è in accordo col noto teorema di Poisson-Laplace sulla stabilità del sistema planetario.

<sup>(1)</sup> Tisserand, op. cit., I, 239.

Per integrare la (8) osserviamo che le quantità  $A, B, M, \chi, e, a, e$  (e quindi  $n$ ), sono costanti mentre,  $\Phi, \theta, \varphi, \vartheta$  variano lentamente col tempo. Estendendo l'integrazione ad un intervallo di tempo molto breve (per es. un giorno solare medio che prendiamo come unità di tempo) potremo, secondo il metodo di Laplace, sostituire a  $\theta, \Phi, \vartheta, \varphi$ , i loro valori medi; e considerare quindi il secondo membro come costante. Se indichiamo con  $\gamma$  lo spostamento diurno del perigio e scegliamo come unità di lunghezza il semidiametro equatoriale  $A$ , avremo con brevi calcoli

$$\frac{a^2 \gamma}{n(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} = 1 - B - \frac{1}{2} \chi - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1-e^2} (\varphi - \Phi \cos \beta) \times \\ \times \left\{ \frac{3e\pi}{7Ma^2} (1+5e^2) (1-B^2)^2 B + 1 - B - \frac{1}{2} \chi \right\} + \\ + \frac{3e\pi}{7Ma^2} (1-B^2)^2 B \left[ 1 - 10 \left( \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\Phi^2}{2} - \Phi \varphi \cos \beta \right) \right]$$

da cui

$$\frac{a^2 \gamma}{n(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} = (B^5 - 2B^3 + B) \frac{3e\pi}{7Ma^2} \left\{ 1 - 10 \left( \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\Phi^2}{2} - \Phi \varphi \cos \beta \right) - \right. \\ \left. - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1-e^2} (\varphi - \Phi \cos \beta) (1+5e^2) \right\} - \\ - B \left[ 1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1-e^2} (\varphi - \Phi \cos \beta) \right] - \frac{1}{2} \chi \left[ 1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1-e^2} (\varphi - \Phi \cos \beta) \right] + \\ + 1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1-e^2} (\varphi - \Phi \cos \beta),$$

e infine

$$(B^5 - 2B^3 + B) \left\{ 1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1-e^2} (\varphi - \Phi \cos \beta) - \frac{\frac{3e\pi}{7Ma^2} \left[ 1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1-e^2} (1+5e^2) (\varphi - \Phi \cos \beta) - 10 \left( \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\Phi^2}{2} - \Phi \varphi \cos \beta \right) \right]}{1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1-e^2} (\varphi - \Phi \cos \beta)} \right\} + \\ + \frac{1 - \frac{1}{2} \chi \left[ 1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1-e^2} (\varphi - \Phi \cos \beta) - \frac{a^2 \gamma}{n(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1-e^2} (\varphi - \Phi \cos \beta) \right]}{\frac{3e\pi}{7Ma^2} \left[ 1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1-e^2} (1+5e^2) (\varphi - \Phi \cos \beta) - 10 \left( \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\Phi^2}{2} - \Phi \varphi \cos \beta \right) \right]} = 0.$$

Siamo così giunti ad una equazione algebrica di 5° grado, di cui possiamo calcolare i coefficienti; la quale, risolta, ci dà il valore di B.

#### RIDUZIONE DELL'EQUAZIONI (3) E (4) AD EQUAZIONI LINEARI.

Con alcune sostituzioni sono riuscito a dar forma più semplice alle (3) e (4). Indicando con  $b$  e  $c$  due costanti e ricordando, che, essendo  $e$  e  $\varphi$  quantità molto piccole, noi ne possiamo trascurare le potenze superiori alla seconda avremo, tralasciando anche il termine  $e^2 \Phi^2$

$$R_s = b \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} \Phi^2 + \Phi \varphi \cos \beta \right) + \\ + c(1 + 5e^2 - 5\varphi^2 - 5\Phi^2 + 10 \Phi \varphi \cos \beta).$$

Poniamo ancora

$$\begin{aligned} e \sin \omega &= x & \varphi \sin \vartheta &= z \\ e \cos \omega &= y & \varphi \cos \vartheta &= w \end{aligned}$$

ricordando che si ha  $\beta = \theta - \vartheta$  la  $R_s$  diviene

$$R_s = \frac{b}{3} + c + \left( \frac{b}{2} + 5c \right) [x^2 + y^2 - z^2 - w^2 - \Phi^2 + 2\Phi(w \cos \theta - z \sin \theta)].$$

Poniamo, sempre per brevità,  $\frac{b+10c}{na^2} = m$ , trascurando sempre i termini di grado superiore al secondo in  $e$  e  $\varphi$ , otteniamo dalla (3) e dalla (4) con brevi calcoli:

$$\frac{dx}{dt} - my = 0 \qquad \frac{dy}{dt} + mx = 0.$$

Essendo  $m$  una costante nota otteniamo subito  $x$  ed  $y$  e quindi  $e$  e  $\omega$ ; è questa un'altra via per giungere al risultato.

#### CONCLUSIONE.

I più esatti valori degli elementi e di  $\gamma$  sono quelli dati da E. E. Dobbin (loc. cit.) per il 1903, sett. 8,25; adoperando i quali per calcolare i coefficienti della (10) otteniamo

$$(11) \qquad B^5 - 2B^3 - 19,336B + 19,055 = 0$$

la quale equazione ha una sola radice compresa tra 0 e 1. Approssimandosi ad essa col metodo di Newton troviamo  $B=0,9377$ .

Paragonando questo valore con quello trovato dai più abili osservatori abbiamo la seguente

TABELLA

| OSSERVATORE             | AUTORITÀ                | STRUMENTO         | VALORE DI B |
|-------------------------|-------------------------|-------------------|-------------|
| Arago . . . . .         | Astr. Populaire IV, 322 | Micrometro        | 0,940       |
| John Herschel . . . . . | Outlines of Astr. 512   | Microm. ed eliom. | 0,934       |
| Schur . . . . .         | Valentiner              | " "               | 0,938       |
| Bessel . . . . .        | Handwort. der Astr.     | " "               | 0,936       |
| Kaiser . . . . .        | " "                     | Eliometro "       | 0,941       |

Media delle osservazioni . . . . . 0,9378

Valore calcolato . . . . . 0,9377

Differenza . . . . . 0,0001

L'accordo non potrebbe essere più completo: adotteremo quindi 0,93775 come il valore migliore del semidiametro polare B.

**Economia matematica.** — *Contributo alla teoria matematica della dinamica economica.* Nota del dott. LUIGI AMOROSO, presentata dal Corrisp. M. PANTALEONI.

4. Riprendendo le notazioni e le formule della nostra Nota precedente<sup>(1)</sup>, occorre mostrare:

a) che è possibile determinare sperimentalmente la forma delle funzioni  $\psi_i$ , ovvero delle funzioni  $\Phi_i$ ;

b) che, supposte determinate tali funzioni, si ha il modo di scrivere le equazioni generali della dinamica economica senza ricorrere ulteriormente alla esperienza.

Cominciamo dal secondo punto. Analogamente a quanto si definisce nella Meccanica, diciamo

$$x_i = \Phi_i \quad i = 1, 2, \dots$$

le componenti delle forze di inerzia relative all'individuo considerato: secondo il principio di d'Alembert, le equazioni della dinamica si deducono dalle equazioni della statica, purchè alle componenti alle forze applicate (i gusti) si aggiungano le componenti delle forze d'inerzia del sistema.

(<sup>1</sup>) Vedi pag. 259.



Occorre però osservare che, per poter applicare correttamente il principio di d'Alembert, occorre che nelle equazioni della statica figurino le funzioni che misurano le forze, e non già funzioni indici delle forze. Nel caso presente occorre quindi ammettere che sia vera l'ipotesi di Jevons, della misurabilità del piacere: cioè esista e sia possibile di determinare una funzione che misuri il piacere: supporre, cioè, che nelle equazioni generali (6) la funzione  $\varphi$  sia proprio l'ofelimità e non già una funzione indice della ofelimità.

Accettata tale ipotesi, le equazioni generali del moto di un punto economico (*homo oeconomicus*) saranno:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} m x_i'' - \Phi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \sum_k^{1 \dots p} \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots n \\ \psi_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots p. \end{array} \right.$$

In particolare, se si ha

$$(13) \quad q = 1, \quad \psi_1 = \sum_s^{1 \dots n} p_s x_s - \Gamma(t),$$

le equazioni (12) diventano

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} m x_i'' - \Phi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \lambda p_i \quad i = 1, 2, \dots n. \\ \sum_s^{1 \dots n} p_s x_s = \Gamma(t) \end{array} \right.$$

Se  $\Gamma(t)$  rappresenta il reddito annuale, o mensile, o giornaliero, di un individuo, le equazioni (14) rappresentano l'impiego che egli fa del suo reddito, e mostrano come tale impiego varia col variare del reddito stesso.

5. Resta da indicare come possa farsi la determinazione sperimentale della funzione  $\Phi_i$ . Basta perciò considerare un caso particolare delle formule generali (12), per es. il caso contemplato dalle formule (13), ed osservare come in tal caso procedono le cose nella realtà.

Le statistiche dei bilanci familiari ci rivelano, ove si considerino famiglie per cui il reddito varii (crescendo o decrescendo) di anno in anno, ovvero di mese in mese, ovvero di settimana in settimana, quali sono i valori di  $x_1, x_2, \dots x_n$  corrispondenti a dati valori di  $t$  compresi nell'intervallo da  $t_0$  a  $t_1$ . Interpolando tali valori, si ottengono, sperimentalmente, i valori delle funzioni:

$$x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)$$

e, successivamente, delle derivate prime e seconde

$$\begin{aligned} x'_1(t), x'_2(t), \dots x'_n(t) \\ x''_1(t), x''_2(t), \dots x''_n(t) \end{aligned}$$

per tutti i valori di  $t$  compresi nell'intervallo da  $t_0$  a  $t_1$ .

Osserviamo d'altra parte che il parametro  $\lambda$  che figura nelle formule (14) rappresenta la *tensione* del sistema economico considerato, cioè misura in ogni istante la reazione, che oppone il vincolo rappresentato dalla condizione del pareggio del bilancio. Si possono quindi determinare degli indici (per es. l'ammontare dei debiti o dei crediti in ciascun istante) che misurino i valori di  $\lambda$  per ogni valore di  $t$  compreso nell'intervallo considerato.

Sostituiamo allora i valori di  $\lambda, x_i, x'_i, x''_i$  nelle equazioni

$$m x''_i = \Phi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \lambda p_i \quad i = 1, 2, \dots n.$$

Essendo note le  $\varphi$  e le  $p_i$ , possiamo per ogni valore di  $t$ , compreso fra  $t_0$  e  $t_1$ , calcolare i valori di

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n.$$

Procedendo quindi per interpolazione otteniamo i valori di ciascuna delle  $\Phi_i$  in funzione di  $t | x_1, x_2, \dots x_n | x'_1, x'_2, \dots x'_n$ :

$$\Phi_i(t | x_1, x_2, \dots x_n | x'_1, x'_2, \dots x'_n) \quad i = 1, 2, \dots n.$$

Il problema è così ridotto ad un ordinario problema di statistica, e precisamente di statistica matematica.

6. Riepilogando: le formule (12) riassumono le leggi del moto di un punto economico (*homo oeconomicus*), comunque vincolato. Tali leggi sono state ottenute, basandosi sopra due postulati od ipotesi fondamentali: l'ipotesi della misurabilità del piacere, ed il postulato che il moto di un punto economico sopra una varietà di indifferenza sia indipendente dalla posizione iniziale del punto stesso.

7. Si può — senza ricorrere ulteriormente a nuove ipotesi — dedurre dalle equazioni generali dell'equilibrio le equazioni della dinamica dei *sistemi economici*.

Ci limitiamo in questa Nota a considerare un caso particolare, precisamente il caso di un mercato *chiuso* (tale cioè che nessuna merce entri e nessuna merce esca) *in condizioni di libera concorrenza*.

Per fissare le idee, supponiamo che sieno  $m$  individui e tre sole merci  $X, Y, Z$ . Analogamente si tratta il caso generale in cui le merci sieno  $n$ .

Supponiamo che la merce Z sia un prodotto delle altre due X, Y. Le condizioni tecniche della produzione faranno allora conoscere le quantità

$$\varphi(z), \psi(z),$$

rispettivamente di X e di Y, occorrenti a produrre la quantità  $z$  di Z.

Diciamo

$$x_i^{(0)}, y_i^{(0)}, z_i^{(0)} \quad i = 1, 2, \dots m$$

le quantità di ciascuna merce possedute *inizialmente* dall' $i^{mo}$  individuo,

$$x_i, y_i, z_i \quad i = 1, 2, \dots m$$

le quantità possedute dallo stesso  $i^{mo}$  individuo *in un istante generico*  $t$ ;

$$\xi, \eta$$

le quantità di X e di Y impiegate a produrre Z;

$$p, q$$

i prezzi di X e di Y in unità di Z (moneta).

Sia poi

$$\varphi_i(x, y, z) \quad i = 1, 2, \dots m$$

la funzione ofelimità dell'individuo  $i^{mo}$ ;

$$\begin{aligned} m_i x_i'' - \Phi_{1i}(t|x', y', z') \\ m_i y_i'' - \Phi_{2i}(t|x', y', z') \\ m_i z_i'' - \Phi_{3i}(t|x', y', z') \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots m,$$

le componenti in ogni istante delle forze d'inerzia relative all'individuo  $i^{mo}$ .

Avendo supposto che la produzione e la vendita avvengano in regime di *libera concorrenza*, le equazioni del moto si dedurranno allora dalle equazioni dell'equilibrio di Jevons-Walrass, applicando ad esse il principio analogo a quello di D'Alembert.

Si ottengono così le equazioni differenziali

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} m_i x_i'' - \Phi_{1i} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} - \lambda_i p \\ m_i y_i'' - \Phi_{2i} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} - \lambda_i q \\ m_i z_i'' - \Phi_{3i} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_i} - \lambda_i \end{aligned} \right. \quad i = 1, 2, \dots m,$$

alle quali bisogna aggiungere le equazioni che rappresentano i vincoli del

sistema: precisamente le equazioni che esprimono che il mercato è *chiuso*,

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi + \sum_i^{1...m} (x_i - x_i^{(0)}) = 0 \\ \eta + \sum_i^{1...m} (y_i - y_i^{(0)}) = 0 \\ \zeta - \sum_i^{1...m} (z_i - z_i^{(0)}) = 0 \\ \xi = \varphi(\zeta), \quad \eta = \psi(\zeta), \end{array} \right.$$

e le equazioni che esprimono il *pareggio dei singoli bilanci individuali*

$$p(x_i - x_i^{(0)}) + q(y_i - y_i^{(0)}) + (z_i - z_i^{(0)}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots m.$$

Le equazioni (16) sono in numero di 5, le (17) in numero di  $m$ : esse ci permettono di esprimere  $m + 5$  delle quantità

$$\begin{array}{l} x_i, y_i, z_i \\ \xi, \eta, \zeta \\ p, q \end{array} \quad i = 1, 2, \dots m$$

in funzione di  $2m$  parametri indipendenti

$$\begin{array}{l} \text{Posto} \\ q_1, \dots, q_{2m} \\ q_{2m+i} = \lambda_i \end{array} \quad i = 1, 2, \dots m,$$

le (15) forniscono allora un sistema di  $3m$  equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine fra le funzioni incognite

$$(18) \quad q_1, q_2, \dots, q_{3m}.$$

Queste equazioni determinano in generale le funzioni (18) in ogni istante  $t$ , purchè, oltre ai valori iniziali

$$(19) \quad x_i^{(0)}, y_i^{(0)}, z_i^{(0)} \quad i = 1, 2, \dots m$$

che rappresentano le quantità di ciascuna merce possedute *inizialmente* da ciascun individuo, si conoscano ancora i valori *iniziali* delle derivate

$$x_i'^{(0)}, y_i'^{(0)}, z_i'^{(0)} \quad i = 1, 2, \dots m$$

che rappresentano le variazioni iniziali delle quantità (19) in un tempo piccolissimo  $dt$ .



**Meccanica.** — *Sul principio di reciprocità.* Nota di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Fisica.** — *Sul calore specifico del tungsteno a temperature elevate.* Nota II di O. M. CORBINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

I risultati, che ho avuto già l'onore di comunicare all'Accademia (<sup>1</sup>), sulle proprietà del tungsteno ad alta temperatura (dedotte dallo studio con uno speciale metodo elettrico del rapporto  $\frac{c}{a}$  tra il calore specifico e il coefficiente *attuale* di variazione della resistenza con la temperatura), mi hanno indotto ad aumentare la precisione delle misure, ciò ch'è stato possibile in virtù della pratica acquistata nell'impiego del metodo.

Così avevo notato che mentre la temperatura del filamento, per una brusca piccola alterazione della resistenza zavorra, varia esponenzialmente fino al suo nuovo valore, e il coefficiente di rapidità dell'esponenziale è piuttosto elevato (da 2 a 30), a quella rapida variazione esponenziale si sovrappone, nell'esperienza, una variazione piccola e molto più lenta; dovuta probabilmente al consecutivo riscaldamento degli elettrodi sottili cui è saldato il filamento. E perciò, col dispositivo del ponte, appena operata la chiusura del tasto *ab*, il galvanometro subisce un impulso e torna rapidamente a zero; ma si riconosce subito dopo un lieve e lento spostamento della posizione di riposo, fino a una nuova posizione stabile alquanto diversa dalla primitiva. Con la lampadina da me sperimentata, questa perturbazione era abbastanza sensibile, ed era perciò ragionevole il ritenere che essa producesse i suoi effetti anche nel tempo della brusca deviazione e del sollecito ritorno dell'equipaggio che ha luogo alla chiusura del tasto *ab*.

E di fatti, ricorrendo per tutte le misure al galvanometro Siemens e Halske, più pronto dell'Hartmann e Braun, ho ottenuto dei valori di  $\frac{c}{a}$  un po' inferiori, del 3 per cento, a quelli che ho già comunicato.

(<sup>1</sup>) Rend. Lincei, fasc. 3°, febbraio 1912, pag. 188.

Altri miglioramenti furono apportati nella valutazione del rapporto  $\frac{Ai/i}{Ar/r}$ , nella misura della potenza  $W$ , e in quella della resistenza  $r$ , eseguendo su quest'ultima la correzione dei fili adduttori fino all'origine del filamento, ciò che fu facile dopo la rottura della lampadina.

Nella seguente tabella sono riprodotti i risultati definitivi, che sostituiscono quelli della tabella I della Nota precedente: in essa  $r$  denota la resistenza del solo filamento, posta eguale a 1 la resistenza a  $20^\circ$ .

TABELLA I.

| Tensione<br>Volt. | intens.<br>amp. | $r$  | $\frac{c}{a}$ |
|-------------------|-----------------|------|---------------|
| 11,0              | 0,132           | 4,84 | 4,62          |
| 22,3              | 0,201           | 6,46 | 6,11          |
| 31,9              | 0,250           | 7,45 | 7,18          |
| 50,2              | 0,328           | 8,92 | 8,62          |
| 94,8              | 0,481           | 11,5 | 11,34         |
| 105,6             | 0,513           | 12,0 | 11,8          |

L'accresciuta precisione dei risultati ci pone in grado adesso di passare dalle capacità calorifiche a pressione costante, che sono quelle osservate, alle capacità a volume costante, che sono quelle considerate nella teoria dei calori specifici.

Ci si può servire allo scopo della formola di Nernst e Lindemann <sup>(1)</sup>, che richiede la conoscenza della temperatura di fusione del metallo, e di una costante universale, determinabile, per confronto, ad esempio, col platino. Il punto di fusione è conosciuto con sufficiente esattezza, per lo scopo attuale, dopo le ricerche di Pirani; si tratta, invero, di una correzione di ben lieve entità. Si ottiene così che i valori di  $c$  direttamente misurati, per dedurne quelli a volume costante, van ridotti di  $35,5 \times 10^{-6}$  per ogni grado di temperatura assoluta.

Ora, come ebbi già ad osservare, è assai notevole il risultato della esperienza per cui il rapporto  $\frac{c}{a}$  è sensibilmente proporzionale a  $r$ ; la costante di proporzionalità è data da

$$\frac{c}{a} \frac{1}{r} = \frac{c}{\frac{dr}{dt}}$$

(<sup>1</sup>) Zeitschr. f. Elektrochemie; 17, pag. 817; 1911.

essendo

$$a = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt}.$$

Nella tabella seguente sono riportati i valori del rapporto  $c : \frac{dr}{dr}$  a pressione costante e a volume costante.

TABELLA II.

| T    | r     | $c_p : \frac{dr}{dt}$ | $c_v : \frac{dr}{dt}$ |
|------|-------|-----------------------|-----------------------|
| 800  | 4,84  | 0,954                 | 0,918                 |
| 1070 | 6,46  | 0,946                 | 0,900                 |
| 1235 | 7,45  | 0,964                 | 0,908                 |
| 1485 | 8,02  | 0,966                 | 0,904                 |
| 1915 | 11,5  | 0,986                 | 0,908                 |
| 2000 | 12,00 | 0,983                 | 0,903                 |

Come si vede, la proporzionalità ch'è solo approssimata tra  $c_p$  e  $\frac{dr}{dt}$ , diviene migliore tra  $c_v$  e  $\frac{dr}{dt}$ . Questo risultato è indipendente dalla conoscenza del valore di  $a$  fondata su altre esperienze, come quelle di Pirani, che intervengono solo nel determinare la temperatura approssimata, allo scopo di apportare la lieve correzione pel passaggio da  $c_p$  a  $c_v$ . E basta che le temperature siano note a meno di 300°, perchè il valore calcolato per  $c_v$  sia esatto entro l'1 per cento.

Da questo risultato si può inversamente dedurre che se pel tungsteno  $c_v$  è costante, nei limiti 800-2000°, deve essere anche costante  $\frac{dr}{dt}$ . E poichè, secondo tutti i risultati conosciuti, il tungsteno dovrebbe, oltre gli 800°, possedere un calore specifico  $c_v$  sensibilmente costante, se ne può dedurre che al disopra di 800° la curva resistenza-temperatura deve avere un andamento rettilineo, come il Pirani constatò, fino alla temperatura più alta (1500°) sperimentata.

Si può perciò prolungare quella retta nelle temperature più alte, e con essa apprezzare le temperature, anzichè estrapolare, come ebbe a fare il Pirani, la curva energia-temperatura.

Posto ciò, essendo nella parte rettilinea della curva del Pirani

$$\frac{dr}{dt} = 0,0059$$

dove  $r$  indica, come sempre, la resistenza del filo riferita alla resistenza a 20°, si può facilmente dedurre dall'ultima colonna il valore della capacità calorifica  $c_v$  del filamento.

Si ottiene così

TABELLA III.

| $r$  | T    | $c_v \times 10^4$ |
|------|------|-------------------|
| 4,84 | 800  | 54,2              |
| 6,46 | 1070 | 53,1              |
| 7,45 | 1235 | 53,6              |
| 8,92 | 1485 | 53,4              |
| 11,5 | 1915 | 53,6              |
| 12,0 | 2000 | 53,3              |

E si noti, che se si fossero adottati i valori di  $\alpha$  dedotti dalla curva di Pirani, la quale, come si è detto, è costruita per estrapolazione oltre i 1500°, gli ultimi due valori di  $c_v \times 10^4$  a 1915° e a 2000° sarebbero stati 77 e 80; si manifesterebbe cioè un aumento di  $c_v$  assolutamente improbabile, sia perchè troppo forte, sia perchè avrebbe principio solo oltre i 1500°, quando cioè comincia l'estrapolazione.

Viene così reso ancora più accettabile il criterio da me già consigliato di utilizzare i valori del rapporto  $c_v: \frac{dr}{dt} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{r}$  direttamente ricavati dall'esperienza col metodo che ho indicato, e dedurre  $\frac{dr}{dt}$ , e quindi  $r$  in funzione di  $t$ ; il che costituisce il modo migliore, a mio parere, per risolvere il problema della pirometria dei fili incandescenti, quando si conosca per altra via, per esempio con le curve di Einstein o di Nernst, l'andamento di  $c_v$ . Questo andamento, nelle alte temperature è, del resto, per tutti i metalli, quasi costante.

Le nuove misure, di cui comunico i risultati, confermano perciò, malgrado l'aumentata precisione, le conclusioni cui ero già pervenuto.

2. Tutt'altro avviene però nei riguardi del passaggio dalla capacità calorifica del filo al calore specifico. Occorre, per questo, valutare il peso del filamento, che fu da me allora stimato indirettamente con la misura ottica delle sue dimensioni.

Solo adesso ho potuto rompere la lampadina e misurare direttamente il peso del filo: ne ho ricavato un valore inesplicabilmente diverso dal primo: 30, anzichè 41 milligrammi. Ho potuto solo riconoscere che l'errore fu commesso, la prima volta, nella valutazione del diametro del filo, che fu stimato eguale



a mm. 0,062, mentre misurato ora al microscopio ha dato mm. 0,0548, in ottimo accordo con la misura diretta del peso.

Viene così a mancare la fortuita coincidenza da me constatata allora tra il valore teorico e quello sperimentale del calore specifico atomico; si ottiene invero, posto eguale a 184 il peso atomico,

$$c_v = 7,8$$

anzichè

$$c_v = 5,95$$

come sarebbe richiesto dalla teoria. Si potrebbe pensare a qualche causa di errore sistematica che abbia alterato in blocco i miei risultati sperimentali per lo enorme ammontare di circa il 24 per cento del valore osservato. Ma ho dovuto respingere questo dubbio, come assolutamente infondato, dopo un esame rigoroso della teoria e della realizzazione del metodo e dei risultati delle misure.

Sarà bene, del resto, osservare che anche alla temperatura di soli 285° dalle esperienze di Defacqz e Guichard <sup>(1)</sup>, si deduce pel calore atomico del tungsteno a pressione costante, il numero 7,2, che dà per  $c_v$ :

$$c_v = 7,1$$

valore anche esso troppo alto rispetto al valore teorico. La differenza col valore da me trovato (all'incirca il 9 %) è sempre rilevante; ma il contegno abbastanza anormale nell'andamento del calore specifico del tungsteno, quale risulta dalle esperienze citate tra 15 e 400°, potrebbe bastare a rendere ragione di quella differenza, che si produrrebbe nel campo tra 300° e 800° (limite inferiore delle mie esperienze), mentre  $c_v$  resterebbe costante nell'intervallo da 800° a 2000° da me sperimentato.

L'osservazione che segue corrobora questa maniera di vedere.

Si è riconosciuta la costanza del rapporto tra  $\frac{c_v}{a}$  ed  $r$ , cioè tra  $c_v$  e  $\frac{dr}{dt}$ ; sostituendo alla capacità calorifica, in unità meccaniche, il calore atomico a volume costante, il primitivo rapporto che era eguale a 0,907 diviene costantemente

$$c_v : \frac{dr}{dt} = 1,33 \times 10^3.$$

(1) Defacqz e Guichard; Ann. d. Chimie et de Phys. t. 24, pag. 139; 1901.

Ora questo rapporto può dedursi pel tungsteno anche a temperatura ordinaria, per esempio a  $20^{\circ}$ , ricorrendo alle esperienze di Defacqz e Guichard, per quanto riguarda  $c_v$ , e procedendo a una misura diretta di  $\frac{dr}{dt}$  a  $20^{\circ}$ , sul filamento; questa misura era stata già da me eseguita prima della rottura della lampada.

E poichè si ha

$$c_v = 5,91$$

e

$$\frac{dr}{dt} = 0,00432,$$

si deduce

$$c_v : \frac{dr}{dt} = 1,366 \times 10^3 \text{ a } 20^{\circ},$$

valore che differisce da quello che io ho osservato da  $800^{\circ}$  a  $2000^{\circ}$  di meno che il 3 per cento. Sembra perciò che il rapporto  $c_v : \frac{dr}{dt}$  si mantenga veramente costante, pel tungsteno dalla temperatura ordinaria fino a  $2000^{\circ}$ .

Or come risulta dalle misure del Pirani  $\frac{dr}{dt}$  aumenta molto dalla temperatura ordinaria a quella di circa  $700^{\circ}$  (da 0,00415 a 0,0059) <sup>(1)</sup>; a questo aumento farebbe riscontro l'aumento progressivo del calore specifico dal valore di Defacqz e Guichard (7,1) al mio (7,8).

Resta, in ogni caso, abbastanza singolare questo eccesso del calore atomico sul valore teorico, quale risulta nettamente dimostrato da entrambe le ricerche e in così ampio intervallo di temperatura.

<sup>(1)</sup> Questa variazione sarebbe, secondo i risultati di Pirani, 14 volte maggiore, in valore assoluto, nel tungsteno che non nel platino.

Fisica. — *Sull'indipendenza della formula di Laplace per la capillarità dalla legge con cui varia la densità nello strato superficiale dei liquidi.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Laplace ha trovato come varia la pressione interna dei liquidi, prodotta dalla coesione, quando varia la forma della superficie, supponendo i liquidi costituiti da materia attraentesi immobile (anche nelle ultime particelle) e continua, e supponendo che la densità varii bruscamente, senza passare pei valori intermedi, da quella dell'interno del liquido a quella, supposta nulla, dell'esterno.

Come trovasi esposto in principio del trattato di van der Waals, *Sulla continuità dello stato liquido e gassoso*, più diffuso e più accessibile delle opere di Laplace, questi ha supposto che l'attrazione reciproca di due volumi  $dv$ ,  $dv'$  del liquido di densità  $D$ , distanti  $r$ , fosse espressa da  $dv \cdot dv' \cdot D^2 \varphi(r)$ , ossia fosse proporzionale al prodotto delle masse attraentesi e ad una funzione della distanza che diviene nulla se questa è apprezzabile.

Ora poichè molte proprietà dei liquidi hanno condotto a considerarli come costituiti da particelle o molecole isolate attraentesi e dotate di movimento rapidissimo (diverso in grandezza e direzione per le diverse molecole anche della stessa specie) il quale impedisce che esse obbedendo alla attrazione reciproca si riuniscano in una massa continua, ne risulta anzitutto che non è più così evidente che l'attrazione dei due elementi di volume sia proporzionale al prodotto delle masse di essi elementi; difatti al variare della loro densità non solo varieranno in proporzione le masse attraentesi, ma varierà altresì la distanza delle molecole, specialmente quella delle molecole contigue, l'azione delle quali è preponderante. Inoltre se la coesione è dovuta, come par molto probabile, all'attrazione delle cariche elettriche delle molecole variamente orientate, col variare della densità e quindi della distanza media delle molecole potrà prodursi una diversità nell'orientamento medio delle molecole contigue e quindi nell'attrazione reciproca. Può esser, almeno in parte, dovuto a ciò il fatto che la costante  $a$  della formula di van der Waals, la quale moltiplicata pel quadrato della densità rappresenta appunto la pressione dovuta alla coesione, non è che approssimativamente costante, anzi quando la densità raggiunge i valori soliti pei liquidi varia notevolmente.

Inoltre risulta dalla suddetta costituzione dei liquidi, che mentre nell'interno di essi il numero di molecole che attraversano una superficie qualsiasi in un senso è certo uguale al numero di quelle che l'attraversano in senso contrario, nello strato superficiale invece, ogni molecola essendo soggetta da parte delle molecole circostanti a forze la cui risultante è diversa da zero e diretta verso l'interno del liquido, ne segue che supposte inizialmente uguali le densità da entrambi le parti d'una superficie parallela a quella del liquido e contenuta nello strato superficiale, il numero di molecole che attraversano questa superficie dirette verso l'esterno sarà minore di quello delle molecole che l'attraversano dirette verso l'interno del liquido e si produrrà così una diminuzione di densità all'esterno, un aumento all'interno di essa superficie finchè l'effetto di questa differenza non compensi quello della risultante suddetta. La densità del liquido quindi nello strato superficiale andrà decrescendo dall'interno all'esterno (così come nell'atmosfera per effetto della gravità la densità va decrescendo al crescere dell'altitudine). Sebbene la legge colla quale varia questa densità sia ignota pare molto probabile che essa tenda asintoticamente verso la densità del vapore all'esterno e verso la densità del liquido all'interno.

Se s'introducono queste due modificazioni (l'attrazione funzione incognita della densità, la densità variabile) nel processo di calcolo di Laplace s'incontrano delle difficoltà che impediscono di giungere al noto valore  $K + H R$  per la pressione dell'interno dei liquidi dovuta alla coesione. È noto che Poisson tenendo conto della variazione della densità nello strato superficiale, giunse bensì alla stessa espressione ma con valori essenzialmente diversi delle costanti (cioè  $K$  piccolissimo rispetto ad  $H$ ), ma parecchi fisici hanno dimostrato che il calcolo di Poisson non è completo, e perciò i valori da lui trovati per le costanti non sono ammissibili.

Credo che possa presentare qualche interesse la seguente dimostrazione (che pur non differisce essenzialmente da quella di Laplace) della formula della capillarità, nella quale dimostrazione non si fa alcuna ipotesi nè sull'influenza della densità sull'attrazione di due elementi di massa, nè sulla variazione della densità nello strato superficiale e solo si suppone che la legge con cui varia la densità nell'interno dello strato superficiale non dipenda (nemmeno numericamente) dalla forma della superficie (ossia che ad uguali profondità si abbiano sempre uguali densità). ipotesi che appare molto probabile se si considera che rispetto allo spessore (inapprezzabile) dello strato superficiale, i raggi di curvatura soliti della superficie del liquido possono considerarsi come infinitamente grandi, ossia che per estensioni di superficie dell'ordine di grandezza del suddetto spessore, essa può considerarsi sempre come piana. Più rigoroso sarebbe bensì il dimostrare che ad uguali profondità le variazioni della densità prodotte dalla forma della superficie sono infinitesime d'ordine superiore.



Suppongo dunque che l'attrazione fra due volumi elementari del liquido  $d^3v$  e  $d^3v'$  distanti  $r$  ed aventi rispettivamente la densità  $D$  e  $D'$  sia rappresentata da:

$$d^3v \cdot d^3v' \cdot \varphi(D, D', r).$$

Poichè le molecole si suppongono in movimento, la loro distanza, la forza risultante che ciascuna di esse subisce e la forza con cui s'attirano

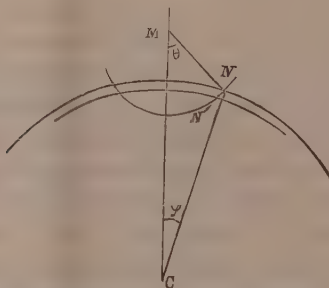


FIG. 1.

due elementi variano continuamente, dovrà quindi intendersi che  $\varphi(D, D', r)$  rappresenti l'attrazione media rispetto al tempo; inoltre sebbene si supponga ignota la forma della funzione rispetto a  $D$  e  $D'$  si dovrà ammettere come evidente che essa aumenti di valore al crescere di  $D$  e  $D'$ . Si potrebbe anche dubitare se la suddetta attrazione sia proporzionale a  $d^3v$  e  $d^3v'$  specialmente quando le dimensioni di questi elementi di volume sono dello stesso ordine di grandezza di  $r$ , ma nel calcolo seguente essendo la densità uniforme in ciascun elemento e costante la distanza  $r$ , tale proporzionalità è ammissibile.

Ciò posto suppongo che la superficie del liquido (l'una o l'altra delle superfici che limitano lo strato superficiale, o la superficie mediana di questo) sia sferica, di raggio  $R$  col centro in  $C$  (fig. 1) e convessa verso l'esterno. Considero un elemento  $M$  di una colonnetta dello strato superficiale, la quale sia a questo perpendicolare, e sia  $d\sigma$  la base,  $dn$  l'altezza,  $D$  la densità di questo elemento, ed  $n$  la sua profondità; considero inoltre uno strato sferico di spessore infinitesimo col centro in  $M$ , compreso fra due superfici di raggi  $r$  ed  $r + dr$  minori della distanza massima dell'azione molecolare ed in questo strato considero un anello determinato da due superfici parallele alla superficie del liquido, distanti  $h$  ed  $h + dh$  da  $M$ , di raggi  $R'$  ed  $R' + dR'$ , pochissimi differenti da  $R$ , situate fra  $M$  e l'interno del liquido; indico con  $D'$  la densità comune a tutti gli elementi di quest'anello.

L'attrazione esercitata da uno di questi ultimi elementi  $d^3v'$  sull'elemento M di volume  $d\sigma dn$  sarà

$$d\sigma dn d^3v' f(D, D', r)$$

e la risultante dell'attrazione dell'intero anello sull'elemento M ponendo  $MMC = \theta$ ,  $NCM = \varphi$  sarà:

$$d\sigma dn \Sigma d^3v' f(D, D', r) \cos \theta.$$

Ora:

$$\Sigma d^3v' = d^2v' = 2\pi r \cos(NN', MC) NN' dr = 2\pi r dr \sin \theta \cdot NN'$$

$$NN' = dh / \cos(\pi/2 - (\theta + \varphi)) = dh / \sin \theta,$$

se si trascura  $\varphi$  (che è  $< 2r/R$ ) rispetto a  $\theta$  e quindi risulta

$$d^2v' = 2\pi r dr \cdot dh.$$

Inoltre dal triangolo NMC si ha:

$$R'^2 = (R' + h)^2 + r^2 - 2(R' + h)r \cos \theta$$

quindi

$$\cos \theta = (2R'h + h^2 + r^2) / 2r(R' + h)$$

ossia trascurando  $h$  rispetto ad  $R'$  si ha

$$\cos \theta = (h + (h^2 + r^2)/2R')/r$$

e l'attrazione dell'anello suddetto sull'elemento M diviene:

$$2\pi d\sigma dn dh dr \varphi(D, D', r) [h + (h^2 + r^2)/2R]$$

e la pressione per unità di superficie che ne deriva sarà:

$$2\pi dr dn dh \varphi(D, D', r) \cdot h + 2\pi dr dn dh \cdot \varphi(D, D', r) \cdot (h^2 + r^2)/2R.$$

Se invece si considera l'anello situato fra M e l'esterno del liquido, (essendo ancora convessa la superficie di questo), risulta che la sua densità  $D''$  è minore di  $D'$  e che l'attrazione da esso esercitata sull'elemento M è diretta verso l'esterno ed il suo volume  $d^2v''$  sarà (fig. 2):

$$d^2v'' = 2\pi r \cos(NN', MC) NN' \cdot dr = 2\pi r dr \sin \theta \cdot NN'$$

$$NN' = dh / \cos(\pi/2 - (\theta - \varphi)) = dh / \sin \theta$$

quindi sarà:

$$d^2v'' = 2\pi r dr \cdot dh.$$

Inoltre dal triangolo NMC s'avrà

$$R^2 = (R - h)^2 + r^2 + 2(R - h)r \cos \theta$$

essendo  $\theta = \pi - \text{NMC}$ , quindi  $\cos \theta = -[-2Rh + h^2 + r^2]/2r(R - h)$  ossia

$$\cos \theta = (h - (h^2 + r^2)/2R)/r$$

e la pressione negativa che risulta nel liquido dall'attrazione di questo anello sull'elemento M sarà:

$$-2\pi dr dn dh \varphi(D, D', r) \cdot h + 2\pi dr dn dh \varphi(D, D'', r) \cdot (h^2 + r^2)/2R$$

e l'attrazione complessiva che risulta dall'attrazione di entrambi, uno più

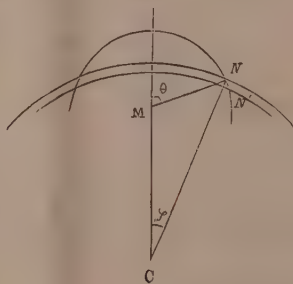


FIG. 2.

interno, l'altro più esterno di M, su di esso elemento M, ponendo per brevità  $\varphi(D, D', r) = \varphi'$  e  $\varphi(D, D'', r) = \varphi''$  sarà:

$$2\pi dr dn dh(\varphi' - \varphi'') \cdot h + 2\pi dr dn dh(\varphi' + \varphi'') \cdot (h^2 + r^2)/2R.$$

Siccome  $\varphi' > \varphi''$  perchè  $D' > D''$  ne risulta che il 1° termine è positivo (ed il secondo altresì) e questa pressione è diretta verso l'interno del liquido.

Se la superficie del liquido fosse concava verso l'esterno si potrebbe ripetere il calcolo precedente supponendo che nelle figure il liquido si trovi in alto, al disopra della sua superficie, le relazioni trovate sussisterebbero, bensì l'anello considerato nella figura 2 sarebbe più interno e quindi più denso di quello considerato nella figura 1, cioè  $D'' > D'$ ,  $\varphi'' > \varphi'$  e l'attrazione esercitata dai due anelli sull'elemento M sarebbe

$$2\pi dr dn dh(\varphi'' - \varphi') \cdot h - 2\pi dr dn dh(\varphi'' + \varphi') \cdot (h^2 + r^2)/2R$$

diretta ancora verso l'interno del liquido.

Ponendo

$$2\pi dr dn dh(\varphi' - \varphi'') \cdot h = dK, \quad 2\pi dr dn dh(\varphi' + \varphi'') (h^2 + r^2) = dH$$

la suddetta pressione diviene

$$dK + dH/2R$$

che vale anche se il liquido ha la superficie concava, purchè si prenda  $R$  negativo. È da notare che:

$$dK/dH = h/(h^2 + r^2)$$

quindi poichè  $h$  ed  $r$  sono quantità piccolissime,  $dK$  è grandissimo rispetto a  $dH$ .

Per ottenere la pressione totale occorrerebbe ora eseguire la triplice integrazione di ciascun termine rispetto ad  $h$ ,  $r$  ed  $n$ , cioè trovare la somma delle infinite attrazioni elementari prima per ogni elemento e per tutti gli anelli che compongono lo strato sferico di raggio  $r$ , quindi per tutti gli strati sferici di raggio crescente da zero al raggio massimo dell'azione molecolare e poi per tutti gli elementi  $M$  dalla colonnetta nello strato superficiale; questa integrazione è certamente impossibile perchè è affatto incognita la forma della funzione  $\varphi$ . Essa d'altronde non è necessaria quando si voglia solo porre tale pressione nella forma oramai classica data da Lagrange.

Difatti per un qualsiasi ma determinato valore di  $n$ ,  $h$  ed  $r$  i valori di  $dK$  e  $dH$  non variano allorchè varia la curvatura della superficie, quindi neppure la somma degl'infiniti valori di  $dK$  e  $dH$  che si ottengono dando ad  $n$ ,  $h$ ,  $r$  tutti i valori possibili varierà e potrà porsi  $\Sigma dK = K$ ,  $\Sigma dH = H$  e la pressione dovuta alla coesione assumerà la nota forma

$$K + H/2R,$$

dove  $K$  è grandissimo rispetto ad  $H$  e, nè  $K$  nè  $H$  dipendono dalla curvatura della superficie del liquido. Il passaggio dal caso di una superficie sferica a quello di una superficie a doppia curvatura si fa nel modo solito.

**Chimica agraria.** — *Sull'ufficio fisiologico del Magnesio nella pianta verde* <sup>(1)</sup>. Nota di LUIGI BERNARDINI e GIUSEPPE MORELLI, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

In una Nota precedente uno di noi <sup>(2)</sup> ha dimostrato che l'assimilazione dell'acido fosforico è regolata dalle quantità relative di magnesio assorbite dalla pianta per la relazione  $\frac{CaO}{MgO} : P^2O^5$  esistente nell'economia del vegetale e nella Nota, *Sulla composizione chimica dell'embrione del riso*, dopo

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica-Agraria della R. Scuola Sup. d'Agricoltura, Portici.

<sup>(2)</sup> L. Bernardini e A. Siniscalchi, Staz. Agr. Sper. It., 1909, Fasc. IV-VI.



aver portato nuovi dati a sostegno di quell'affermazione ha potuto dare un primo appoggio sperimentale all'ipotesi che il magnesio, fra gli altri uffici, ha anche quello di mobilitizzare l'acido fosforico. In quest'ultima Nota veniva posto in rilievo la grande ricchezza in fosforo dell'embrione del riso e veniva dimostrato che in quest'organo la massima parte del fosforo trovasi sotto forma di fitina, e, in base al fatto che nell'embrione del riso di fronte ad un alto contenuto in magnesio si ha una deficienza in calcio, veniva fatto osservare che, data la insufficienza della calce, nell'embrione del riso la fitina, fin'ora ritenuta come un sale calcico-magnesiaco dell'etere esafosforico dell'inosite <sup>(1)</sup> molto verosimilmente deve esservi rappresentata come sale magnesiaco.

La presenza di grandi quantità di fosforo nell'embrione del riso sotto forma di sale magnesiaco dell'etere esafosforico dell'inosite facilmente idrolizzabile per azione enzimatica <sup>(2)</sup> ci portò (Bernardini) a concepire questa sostanza, la fitina, come la forma sotto cui la pianta immagazzinerebbe l'acido fosforico di riserva e dalla quale il fosforo sarebbe mobilitizzato sotto forma di fosfato di magnesio. Il magnesio perciò mentre regolerebbe l'assimilazione dell'acido fosforico per la relazione  $\frac{\text{CaO}}{\text{MgO}} : \text{P}^2\text{O}^5$  da noi dimostrata

(Bernardini e Siniscalchi) avrebbe anche l'ufficio di mobilitizzare l'acido fosforico dai luoghi di riserva ai luoghi di utilizzazione.

Poichè il fosfato di magnesio (fosfato secondario) è facilmente idrolizzabile, in fisiologia vegetale era stata emessa l'ipotesi che il trasporto dell'acido fosforico avvenisse per opera del magnesio, ma quest'ipotesi fino ad oggi non aveva mai potuto avere il suffragio di un dato sperimentale, e siccome d'altra parte le conclusioni dedotte dalle ricerche sulla composizione chimica dell'embrione del riso non dànno che una dimostrazione indiretta di questa ipotesi, noi abbiamo cercato di darne una dimostrazione sperimentale diretta. A questo scopo abbiamo seguito nel seme di frumento germinante all'oscurità e alla luce in assenza di sostanze nutritive l'evoluzione del fosforo organico e inorganico e quello del magnesio in combinazione salina fosfo-organica e minerale.

Il seme fu fatto germinare su pura sabbia di quarzo umida per acqua distillata e il periodo germinativo all'oscurità è stato diviso in 4 stadii: ciascuno stadio fu caratterizzato dalla lunghezza raggiunta dal germoglio e cioè: il 1° semi con germogli di circa mm. 3, il 2° semi con germogli di circa mm. 10, il 3° semi con germogli di circa mm. 40 ed il 4° con ger-

<sup>(1)</sup> Vedi a questo proposito e per la letteratura la Nota di L. Bernardini, *Sulla composizione chimica dell'embrione del riso*. Stesso fascicolo.

<sup>(2)</sup> Susuki, Yoshimura e Takaishi, Bull. of the Coll. Agric., Tokio, vol. VII.

mogli di circa mm. 100. Nella germinazione alla luce il periodo germinativo è stato invece distinto in tre stadii e la caratterizzazione di ciascuno di questi è stata basata sulla presenza della clorofilla nel germoglio: il 1° stadio è dato da semi con germogli eziolati di mm. 3 circa (identico perciò al 1° stadio del periodo germinativo all'oscurità), il 2° da semi con germogli nei quali comincia ad apparire la clorofilla, di circa mm. 10 di lunghezza, il 3° da semi con germogli completamente verdi, di circa mm. 40 di lunghezza.

Nelle ricerche per ogni stadio furono impiegati 500 semi e in questi fu determinato il fosforo dei fosfatidi (solubile in etere e in alcool) e quello solubile in HCl all'1% dopo l'esaurimento del materiale con etere ed alcool assoluto e bollente, in questo liquido fu inoltre determinato il fosforo fitinico e il magnesio. In altri 500 semi fu poi determinato il magnesio solubile in acqua. Il procedimento seguito per la determinazione delle sostanze fosforate è quello esposto nella Nota: *Sulla composizione chimica dell'embrione del riso*, il magnesio è stato determinato nella cenere ottenuta portando a secco i liquidi e incenerendo il residuo.

Nelle tabelle seguenti riportiamo i risultati ottenuti: i risultati sono riferiti a 1000 semi anziché ad un'unità di peso; 1° perchè ci sembra più logico riferirli ad unità fisiologiche, 2° e principalmente perchè solo in questo modo è possibile paragonare fra loro i risultati forniti dai diversi periodi del processo germinativo. È noto infatti che nella germinazione all'oscurità e anche nei primi periodi della germinazione alla luce si ha perdita di sostanza per ossidazioni intramolecolari: il riferire i risultati alla sostanza contenuta nei semi germoglianti porta perciò a numeri che non rappresentano il vero andamento del fenomeno mentre d'altra parte l'uniformità del peso dei granelli di frumento, anche se non selezionati con molta cura, rende possibile il confronto.

TABELLA I. — *Seme non germinato.*

| P <sup>2</sup> O <sup>5</sup> | In 1000 semi | Mg O                                 | In 1000 semi |
|-------------------------------|--------------|--------------------------------------|--------------|
|                               | gr.          |                                      | gr.          |
| Totale . . . . .              | 0,6060       | Totale . . . . .                     | 0,1220       |
| Fosfatidica . . . . .         | 0,0192       | Solubile in HCl all'1% .             | 0,1200       |
| Solubile in HCl all'1% .      | 0,5120       | Solubile in H <sup>2</sup> O . . . . | 0,0120       |
| Fitinica . . . . .            | 0,4160       |                                      |              |

TABELLA II. — *Seme germogliante all'oscurità.*

| PERIODO<br>GERMINATIVO | P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> in 1000 semi |               |               | % di P <sub>2</sub> O <sub>5</sub><br>fitinica<br>rispetto P <sub>2</sub> O <sub>5</sub><br>solub. HCl 1% | Mg O in 1000 semi      |                                 | % di Mg O<br>solub. in H <sub>2</sub> O<br>rispetto MgO<br>solub. HCl 1% |
|------------------------|--------------------------------------------|---------------|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
|                        | Fosfatidica                                | Totale        | Fitinica      |                                                                                                           | Solubile<br>HCl all'1% | Solubile<br>in H <sub>2</sub> O |                                                                          |
| Senza germinare.       | gr.<br>0,0192                              | gr.<br>0,5120 | gr.<br>0,4160 | 76,20                                                                                                     | gr.<br>0,1200          | gr.<br>0,0120                   | 10,00                                                                    |
| 1° Stadio . . . . .    | 0,0188                                     | 0,5120        | 0,3072        | 56,10                                                                                                     | 0,1216                 | 0,0824                          | 67,70                                                                    |
| 2° Stadio . . . . .    | tracce                                     | 0,4600        | 0,1228        | 26,60                                                                                                     | 0,1130                 | 0,1000                          | 89,10                                                                    |
| 3° Stadio . . . . .    | "                                          | 0,4224        | 0,0460        | 10,80                                                                                                     | 0,1040                 | 0,0960                          | 91,70                                                                    |
| 4° Stadio . . . . .    | —                                          | 0,4226        | tracce        | —                                                                                                         | 0,0940                 | 0,0868                          | 92,30                                                                    |

TABELLA III. — *Seme germogliante alla luce.*

| PERIODO<br>GERMINATIVO | P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> in 1000 semi |                      | Mg O in 1000 semi<br>Solubile in H <sub>2</sub> O |
|------------------------|--------------------------------------------|----------------------|---------------------------------------------------|
|                        | Fosfatidica                                | Solub. in HCl all'1% |                                                   |
| Senza germinare .      | gr.<br>0,0192                              | gr.<br>0,5120        | gr.<br>0,0120                                     |
| 1° Stadio . . . . .    | 0,0188                                     | 0,5120               | 0,0824                                            |
| 2° Stadio . . . . .    | 0,0320                                     | 0,2368               | 0,0520                                            |
| 3° Stadio . . . . .    | 0,0550                                     | 0,2680               | 0,0288                                            |

Dall'esame delle cifre riportate risultano i seguenti dati di fatto:

1°. Nella germinazione all'oscurità il fosforo dei fosfatidi e quello della fitina va continuamente diminuendo; la demolizione della fitina segue l'andamento caratteristico delle scissioni idrolitiche enzimatiche. Nelle stesse condizioni il fosforo solubile in HCl all'1% si mantiene relativamente costante al pari del magnesio solubile nello stesso reattivo; il magnesio solubile in acqua invece segue un andamento caratteristico: va aumentando mano mano che la fitina è demolita.

2°. Nella germinazione alla luce il fosforo dei fosfatidi tende ad aumentare coll'apparire della clorofilla, come già fu da noi dimostrato (<sup>1</sup>), quello della fitina nelle stesse condizioni non aumenta. Il magnesio solubile in acqua segue una curva costituita da un ramo ascendente e da uno di-

(<sup>1</sup>) L. Bernardini e G. Chiarulli, Staz. Agr. Sper. It., 1909, Fasc. I-II.

scendente: aumenta nei primi periodi del processo germinativo ma comincia a diminuire coll'apparire della clorofilla.

Dai fatti osservati derivano le seguenti conclusioni:

Nel seme di frumento durante il processo germinativo in assenza di sostanze nutritive e della fotosintesi la fitina viene demolita completamente, e poichè il fosforo fitinico rappresenta i due terzi del fosforo totale, il 67 %, deve si ammettere che il fosforo di riserva sia contenuto nel seme sotto forma di fitina (<sup>1</sup>). È vero che nelle stesse condizioni anche il fosforo dei fosfatidi va diminuendo fino a scomparire ma, a parte che il fosforo fosfatidico rappresenta solo una piccolissima frazione del fosforo totale, lo 0,03 %, se la neoformazione di fosforo fosfatidico che si osserva nella germinazione alla luce in presenza della clorofilla, può far dubitare se i fosfatidi sieno da considerarsi come possibili riserve di fosforo, lecitinico ad esempio (vedi a questo proposito L. Bernardini e G. Chiarulli. loc. cit.), nel caso della fitina non possono sussistere dubbi od incertezze poichè il fosforo fitinico non aumenta alla luce quando incomincia e s'intensifica il lavoro clorofillico. Si potrebbe muovere l'obiezione che nella germinazione alla luce non si è dosato il fosforo fitinico, ma ciò era superfluo poichè, essendo la fitina solubile in HCl all'1 %, trovando che nella germinazione alla luce il fosforo solubile in questo reattivo non aumenta, anche ammettendo che tutto questo fosforo sia fitinico, resta il fatto ch'esso non aumenta.

Parallelamente alla demolizione della fitina si ha un aumento di magnesio solubile in acqua: ora, benchè per difficoltà tecniche ed analitiche non ci è stato possibile determinare direttamente il fosfato magnesiacco, dimostreremo che l'aumento del magnesio solubile in acqua mano mano che la fitina è demolita deve essere attribuito alla formazione di fosfato di magnesio. Difatti nella germinazione all'oscurità si ha che mentre il fosforo solubile in HCl all'1 % si mantiene relativamente costante quello fitinico va diminuendo fino a scomparire e così mentre il magnesio solubile in HCl all'1 % si mantiene relativamente costante quello solubile in acqua va aumentando fino a raggiungere la quasi totalità di quello solubile in HCl all'1 %: ora, poichè la fitina è insolubile in acqua ma solubile in HCl all'1 %, il fosforo solubile in questo reattivo comprenderà quello della fitina e quello dei fosfati inorganici e parimenti il magnesio solubile in HCl all'1 % comprenderà quello che salifica la fitina e quello dei fosfati minerali, l'aumento del magnesio solubile in acqua che si osserva avvenire col progredire della demolizione della fitina non può essere spiegato quindi se non ammettendo che la demolizione della fitina dia luogo a formazione di fosfato di magnesio ed inosite. L'inosite infatti, come fu già osservato da M. Soave (<sup>2</sup>),

(<sup>1</sup>) Posternak C. R. (1903) trova che la fitina è largamente rappresentata in tutti gli organi dove si accumulano sostanze di riserva come semi, bulbi, rizomi ecc.

(<sup>2</sup>) M. Soave, R. Acc. Agricolt. di Torino, vol. XLIX, 1906.



che non è contenuta allo stato libero nel seme in riposo, compare nel seme in germinazione.

La demolizione della fitina nel processo germinativo dei semi avviene quindi per un processo idrolitico che saponifica il sale dell'etere esafosforico dell'inosite in fosfato di magnesio ed inosite, restando così dimostrato che effettivamente esiste nella pianta accanto alla fitina il suo enzima, la « fitasi », capace di saponificarla, enzima che già Susuki, Yoshimura e Takaishi <sup>(1)</sup> avrebbero trovato nella pula di riso.

Ciò porta necessariamente a considerare la « fitina » contenuta nel seme di frumento come un sale magnesiacco dell'etere esafosforico dell'inosite ed infatti, come già facemmo osservare per l'embrione del riso, nel seme di frumento mentre è contenuta la quantità di magnesio necessaria a salificare l'etere esafosforico dell'inosite quivi presente, manca la quantità di calcio necessaria a salificare quest'etere a sale calcico-magnesiacco: 1000 semi di frumento contengono gr. 0,4160 di  $P^2O^5$  fitinica, gr. 0,1220 di  $MgO$  e gr. 0,0712 di  $CaO$ , ora per salificare a sale doppio di calcio e di magnesio gr. 0,4160 di  $P^2O^5$  fitinica occorrono gr. 0,1171 di  $MgO$  e gr. 0,1640 di  $CaO$ .

Resta dunque dimostrato che l'acido fosforico di riserva contenuto nel seme sotto forma di fitina nella germinazione è mobilizzato sotto forma di fosfato di magnesio per un processo enzimatico che scinde, idrolizza la fitina in inosite e fosfato di magnesio.

La dimostrazione fornita che il trasporto dell'acido fosforico dai luoghi di riserva ai luoghi di utilizzazione avviene sotto forma di fosfato di magnesio, messa in relazione con le ben note ricerche del Willstätter sulla costituzione chimica della clorofilla, pone in luce quale importante ufficio abbia il magnesio nell'economia della pianta verde: il magnesio mobilizza l'acido fosforico dai luoghi di riserva ai luoghi di utilizzazione dove l'acido fosforico è utilizzato per la sintesi dei nucleoproteidi e in genere delle sostanze organiche fosforate plastiche, costitutive della cellula, nel mentre che il magnesio viene utilizzato per la costruzione della molecola della clorofilla. Difatti il fosfato di magnesio che si forma a spese della fitina nei primi periodi del processo germinativo (vedi tab. III) comincia a scomparire col l'apparire della clorofilla nel germoglio e sempre più quanto più il germoglio inverdisce.

(<sup>1</sup>) Loc. cit.

Chimica. — *Azione delle aldeidi sui corpi pirrolici. Scomposizione pirogenica dei derivati del dipirrilmetano.* Nota di U. COLACICCHI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulle soluzioni citrofosfatiche.* Nota di U. PRATOLONGO, presentata dal Socio A. MENOZZI.

A. Quartaroli ha testè segnalato, su questi stessi Rendiconti <sup>(1)</sup>, un errore in cui sono incidentalmente incorso, in alcune mie recenti ricerche <sup>(2)</sup>, indicando come *citrato diammonico* il prodotto ottenuto saturando con ammoniaca una soluzione acquosa di acido citrico, sino a neutralità. Non mi dissimulo la gravità dell'errore, pure notando che il prodotto era assai bene caratterizzato dal modo onde era ottenuto, sì da togliere ogni possibilità di equivoco; di esso mi sarei, d'altra parte, indubbiamente accorto nella continuazione delle ricerche, tuttora in corso. Nè l'errore affetta, nemmeno in minimo grado, i risultati ottenuti nella ricerca, poichè lo stesso prodotto — che risponde effettivamente agli scopi applicativi, onde la ricerca ha preso le mosse — venne usato in tutte le ricerche messe a confronto. Da questo punto di vista, l'errore diventa quindi puramente *nominale*.

Gli intensi fenomeni idrolitici da me riscontrati, vanno evidentemente ascritti al *citrato triammonico*, e l'induzione da me tratta trova la sua origine e la sua ragion d'essere nell'errore ora ricordato.

Non scorgo invece relazione alcuna tra i fatti in discussione e la distinzione, cui mi richiama il Quartaroli, fra *sali doppi* e *sali complessi*, dato che le ricerche sull'argomento non sono ancora uscite dal campo dell'equilibrio omogeneo; il Barillé, ponendo, d'altra parte, le sue induzioni a contrasto con quelle di Grupe e Tollens, assume chiaramente, pur senza farne espressa menzione, l'esistenza di ioni complessi citrofosfatici in soluzione acquosa.

Come nella mia Nota precedente, intendo ora astenermi rigorosamente da ogni induzione prematura sull'esistenza o meno di ioni complessi citrofosfatici, nelle soluzioni considerate; il problema è di dominio sperimentale, e sarebbe vano percorrere arbitrariamente i risultati delle ricerche, che sono in corso. Credo utile affermare peraltro, di fronte ai dubbj che la Nota del

(<sup>1</sup>) Vol. 21, I, pag. 130 (1912).

(<sup>2</sup>) Ved. questi Rendiconti, vol. 20, I, 818 (1911).

Quartaroli potrebbe destare a mio riguardo, che nelle mie ricerche non sono stato guidato da prevenzione alcuna, contro l'una o l'altra delle tesi in discussione; così mi è doveroso esprimere schiettamente il mio dubbio — che i chimici organici non esiteranno del resto a dividere — sulla possibilità di attribuire agli ioni complessi citrofosfatici, assunti dal Quartaroli nelle soluzioni acquose, la costituzione loro assegnata dall'A. nel suo più recente lavoro sull'argomento <sup>(1)</sup>.

Chimica tecnologica. — *Ricerche intorno all'olio di olivo* <sup>(2)</sup>.  
Nota di G. SANI, presentata dal Socio G. KOERNER.

La prima parte delle esperienze, i cui risultati ho l'onore di presentare a codesta illustre Accademia, venne eseguita da oltre dodici anni, e se non ho creduto di pubblicarla prima, fu solo nella speranza di potere estendere le mie ricerche di laboratorio e soprattutto di portarle su basi industriali, ma purtroppo mi mancarono i mezzi necessari allo scopo e non ho probabilità di averne in un avvenire prossimo, sicchè non stimerei ragionevole un ulteriore ritardo, tanto più che l'argomento della presente Nota è di attualità.

L'olio d'olivo trae seco, uscendo dai tessuti in cui si contiene, per la pressione alla quale sono sottoposti la polpa del frutto ed il seme, una quantità grande di materiali, alcuni dei quali, per il loro prolungato contatto, possono influire in senso assai dannoso sia per le qualità organolettiche dell'olio stesso, sia perchè possono indurre talune modificazioni assai profonde nella sua composizione.

Questi diversi materiali, dannosi alla buona conservazione dell'olio di olivo si separano malagevolmente per la ragione molto semplice che vi è poca differenza fra la loro densità e quella del liquido in cui sono sospesi, e talora la defecazione completa richiede qualche mese, con danno manifesto alla qualità del materiale. Ora io ho pensato che se fosse possibile di aumentare la differenza fra la densità dell'olio di olivo ed i materiali che all'atto della sua preparazione ne costituiscono l'impurità, ne sarebbe facile una pronta separazione con un mezzo meccanico. Molte sono le sostanze che a tale scopo potrebbero servire purchè rispondessero alle condizioni di essere molto solubili e anche facilmente diffusibili attraverso membrane, perchè buona parte dei materiali inquinanti dell'olio greggio sono detriti di tessuti: però era necessario tenere presente il fatto che l'olio d'olivo è principalmente destinato alla alimentazione umana, sicchè io diedi la preferenza al sale di

<sup>(1)</sup> *Le staz. agr. sper. ital.*, 1910, 43, 552.

<sup>(2)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica agraria del R. Istituto superiore agrario di Perugia.

cucina (cloruro di sodio) e trattai l'olio appena uscito dal torchio con soluzione satura di cloruro di sodio, agitando in modo da portare bene i due liquidi a contatto e dopo qualche tempo sottoposi la miscela a centrifugazione, con una scrematrice Corona, modello piccolissimo. Ebbi immediatamente separato olio limpidissimo ed anche meno colorito di quello che non siano normalmente gli olii di questa regione, destando così la meraviglia del sig. Giulio Broggi, che funzionava da mio assistente, e del personale presente alla esperienza, tutti appartenenti a regioni oleifere ed avezzi ad aspettare dei mesi prima di poter usare olio nuovo.

Le conoscenze della chimica e della zimologia moderne spiegano facilmente l'importanza di una immediata defecazione dell'olio di olivo uscente dai torchi.

Mi riservo di tornare sull'argomento e studiare quale sia la concentrazione più opportuna della soluzione salina, quale la temperatura più conveniente ecc. ecc.

D'altra parte, avendo ripetutamente avuto occasione di analizzare olii genuini d'olivo, ho potuto constatare che talora l'acidità libera assume proporzioni assai rilevanti e che quasi sempre negli olii umbri sorpassa i limiti normalmente trovati nei buoni olii d'olivo. Questi agricoltori dicono che i loro olii sono grassi e la colpa è un poco loro, molto dei mugnai, in parte delle condizioni di raccolta e di conservazione delle olive, le esperienze che seguono, io spero saranno dimostrazione convincente delle mie affermazioni, mentre potranno consigliare pratiche destinate ad evitare i danni lamentati.

È indubbio che la scissione dei gliceridi costituisce la prima fase dello irrancimento dei grassi; ora, il prolungato contatto di enzimi lipolitici, in medio ricco d'acqua, a temperatura relativamente elevata, costituisce la sola causa dello inacidimento degli olii — ma bisogna tenere presente che le suddette condizioni principiano a verificarsi al momento della completa maturanza delle olive e continuano e si esaltano durante la raccolta — il trasporto delle olive dal campo al magazzino, la loro conservazione, la loro molitura. Sopra tutte queste diverse fasi è necessario si porti l'attenzione dei produttori di olio se si vuole, almeno in parte, menomare il danno di avere olii ricchi di acidi.

L'acidità degli olii è tanto maggiore quanto più è grande il tempo interposto fra la raccolta delle olive ed il momento della loro lavorazione per ottenerne l'olio; e tanto più è prolungato il periodo di contatto dell'olio con la pasta, tanto maggiore è la temperatura raggiunta nella molitura e nello impastamento della massa da sottoporsi a pressione, — tanto più lungo è il tempo in cui l'olio resta insieme ai materiali coi quali è accompagnato al momento della sua preparazione.



Ecco alcuni dati analitici sopra olii di olivo umbri che discuterò in appresso:

| Provenienza ..              | Anno | Numero di acidità<br>mmg. di KOH per gr. d'olio |
|-----------------------------|------|-------------------------------------------------|
| 1. S. Martino in Campo. . . | 1910 | 2,55                                            |
| 2. Fontignano . . . . .     | 1911 | 2,735                                           |
| 3. Montefalco . . . . .     | 1910 | 2,40                                            |
| 4. Id. . . . .              | 1911 | 2,155                                           |
| 5. Id. . . . .              | 1911 | 9,02                                            |
| 6. Lacugnano . . . . .      | 1911 | 10,13                                           |
| 7. S. Enea . . . . .        | 1911 | 10,63                                           |
| 8. Casalina . . . . .       | 1910 | 4,25                                            |
| 9. Id. . . . .              | 1911 | 3,89                                            |
| 10. Id. . . . .             | 1911 | 3,55                                            |
| 11. S. Valentino . . . . .  | 1910 | 8,54                                            |
| 12. Id. . . . .             | 1911 | 5,24                                            |

Come ben si vede il numero di acidità in alcuni di questi pochi campioni raggiunge talora un'elevatezza saliente, i primi quattro sono olii di qualità superiore pel paese, ottenuti dalla spremitura della polpa; pei numeri cinque, sei, sette mi risulta che le olive vennero conservate in magazzino per circa quaranta giorni prima di essere molite, i campioni d'olio di Casalina vennero separati per sifonamento delle acque di vegetazione appena spremuti in tutti l'acidità libera è soverchia.

Ho potuto avere due campioni d'olio di olivo preparati il 1° febbraio di questo anno a Casalina durante il corso pratico di oleificio fatto ai nostri studenti. Ecco i dati analitici:

|                                        | Numero di acidità |
|----------------------------------------|-------------------|
| Olio di prima qualità 1912 . . . . .   | 25,83             |
| Olio di seconda qualità 1912 . . . . . | 25,77             |

La conservazione delle olive venne fatta coi soliti metodi, ma come si vede la lipolisi fu assai profonda; e le olive furono proprio della stessa qualità di quelle che fornirono gli olii dei numeri nove e dieci.

Con olive conservate per seme nel nostro Istituto ho preparato separatamente il 29 febbraio, in Laboratorio, olio dalla polpa e olio dal seme per vedere se la lipolisi fosse diversa o no ed ebbi questi risultati:

|                                                                                  | Numero di acidità |
|----------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| Olio di polpa appena preparato . . . . .                                         | 66,72             |
| "    "    dopo 24 ore di contatto con le<br>acque di vegetazione a 20° . . . . . | 76,78             |
| Olio dei semi appena estratto con etere . . . . .                                | 7,05              |
| "    "    schiacciati e lasciati in pasta per<br>due giorni . . . . .            | 8,80              |

La lipolisi dei gliceridi costituenti l'olio d'olivo è di gran lunga più attiva nella polpa che non nel seme racchiuso nel nocciuolo, certo per la presenza di maggiore quantità d'acqua; nei semi liberati dallo spermoderma e schiacciati in pasta essa procede poi rapidamente.

I pochi dati sovraesposti e le considerazioni fatte bastano a porre in rilievo la necessità di provvedere a migliorare i mezzi di preparazione dell'olio e quelli di conservazione delle olive.

Per questo ultimo argomento espongo il risultato di una mia modesta esperienza che potrà, credo, portare a qualche utile risultato. Durante l'ultima raccolta di olive e precisamente il 17 novembre p. p. ho prelevato una certa quantità di frutti sani e maturi ponendone una parte in una ghiacciaia, dell'altra porzione rimasta ho preparato olio con piccola quantità il giorno 18 di detto mese e ne ho determinato l'acidità ottenendo mmg. 1,02 di KOH per grammo, poi su altra porzione conservata in ambiente non riscaldato, ho nuovamente preparato olio il 15 dicembre, che ha presentato un numero di acidità pari a 9,2; altra preparazione di olio ho fatto il 15 gennaio con numero di acidità pari a 21,32. Finalmente il 10 febbraio ho determinato l'acidità nell'olio preparato da una quarta porzione ottenendo 32,05 come numero di acidità, le olive furono tenute in luogo sano ed areato.

Negli stessi giorni ho sempre prelevato campioni delle olive conservate in ghiacciaia ed ho constatato ognora che l'olio da esse preparato forniva numeri di acidità oscillanti fra 1 e 1,5. Sicchè il freddo arresta l'attività degli enzimi lipolitici contenuti nel frutto delle olive, intorno alla portata economica della cosa non posso ora giudicare.

Olive essicate rapidamente, appena raccolte e conservate per tre mesi e mezzo in luogo asciutto, hanno fornito olio ottimo per profumo, per sapore, che ha dato un numero di acidità di 1.32 il che comprova che in assenza d'acqua la lipolisi non si verifica. In una prossima Nota riferirò sul rapporto per cui sono rappresentati i diversi acidi che costituiscono l'acidità libera degli olii d'olivo.

*Embriologia. — Di alcune particolarità embriologiche in Poinsettia pulcherrima* R. Gr. Nota della sig.<sup>na</sup> G. DONATI, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente BLASERNA comunica che, in seguito ad invito della Società Reale di Londra, l'Accademia dei Lincei si fece rappresentare ai funerali di lord LISTER a Londra, dai Soci stranieri Sir ARCHIBALD GEIKIE e Sir JOSEPH LARMOR.

Il Presidente BLASERNA annuncia alla Classe che alla seduta sono presenti il comm. CORRADO RICCI direttore delle Antichità e Belle arti, il prof. POSSENTI R. Ispettore degli Scavi per l'Umbria, e il marchese CITTADINI-CESI. Il prof. POSSENTI, nel presentare la maschera in cera del principe FEDERICO CESI fondatore dell'Accademia dei Lincei, maschera da lui lungamente ricercata e felicemente scoperta in una chiesa di Acquasparta, legge una Relazione riguardante la scoperta suddetta, sulla quale porge interessanti particolari che ne assicurano la autenticità. Presenta anche una bellissima medaglia, di proprietà della famiglia Cesi, che porta il ritratto del principe Federico Cesi, i cui sembianti corrispondono a quelli della maschera.

In seguito alla speranza espressa dal prof. Possenti che la maschera resti quale prezioso cimelio in custodia perenne dell'Accademia, e dopo le dichiarazioni del comm. Corrado Ricci che è ben lieto di adoperarsi presso il Governo perchè ciò avvenga, il Presidente, a nome dell'Accademia, si compiace col prof. Possenti della sua importante scoperta, lo ringrazia per la interessantissima sua comunicazione, e, sicuro che l'opera del comm. Ricci approderà a buon fine, dichiara che l'Accademia collocherà in posto onorevole la preziosa memoria del suo grande Fondatore.

La Relazione del prof. Possenti sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH, presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci PIROTTA e BERLESE, dell'ing. MELI, e dei professori SALVADORI e DE TONI. Fa inoltre menzione dei primi due volumi, pubblicati dalla Società elvetica di scienze naturali, delle « *Opera omnia* » di LEONARDO EULERO, e del volume dei signori PRYM e ROST: *Teoria delle funzioni di Prym di primo ordine, in relazione alle scoperte di Riemann.*

Il Socio Foà fa omaggio del volume contenente gli *Atti del 1° Congresso internazionale dei Patologi*, tenutosi a Torino nell'ottobre del 1911, e ne discorre.

L'Accademico Segretario MILLOSEVICH presenta la pubblicazione del prof. EREDIA intitolata: *Climatologia di Tripoli e Bengasi*, riassumendo notizie e dati contenuti nella pubblicazione stessa.

E. M.



# OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentata nella seduta del 4 febbraio 1912.*

- ANGELITTI PH. — De principio medii arithmetici. (Abdruck aus den « Astr. Nachr. » Bd. 185). Panormi, 1910. 8°.
- ANGELITTI PH. — Le distanze dalla terra agli astri. (« Calendario Astronomico-commerciale di Palermo, 1911 »). Palermo, 1911. 8°.
- ARMELLINI G. — Il problema dei due corpi nell'ipotesi di masse variabili. (Estr. dai « Rend. R. Acc. dei Lincei, Cl. sc. fis. », vol. XX). Roma, 1911. 8°.
- BUSC H. A. — Rhoecadales i Sarraceniales Florui Kaukasa. Jurev, 1904-1910. 8°.
- COLLARD A. — Catalogue alphabétique des livres, brochures et cartes. (Bibliot. de l'Observat. R. de Belgique à Uccle.). Bruxelles, 1910.
- GERBAULT ED.-L. — Observations sur quelques pélories de la Violette. (Estr. du « Bulletin de la Soc. Linnéenne de Normandie » 6° ser., 3° vol.). Caen, 1911. 8°.
- GREENHILL G. — The Attraction of a Homogeneous Spherical Segment. (Repr. from « American Journal of Mathematics », vol. XXXIII, 4). London, 1910. 4°.
- ISSEL A. — Cenni intorno ai littorali italiani considerati dal punto di vista geologico. (Estr. da « Prefazione al Portolano delle Coste d'Italia », s. l. nec d.
- ISSEL A. — L'evoluzione delle rive marine in Liguria. (Estr. dal « Bollett. della Soc. Geogr. Ital. » fasc. IX). Roma, 1911. 8°.
- ISSEL A. — Le misure di gravità e il pre-saggio dei parossismi vulcanici. (Estr. dalla Riv. Ligure di Sc. lett. ed arti, 1910). Genova, 1910. 8°.
- ISSEL A. — Origine e conseguenze delle frane. (Estr. dalla Riv. mensile di Sc. Nat., « Natura » vol. I). Pavia, 1910. 8°.
- LABOZZETTA B. — Determinazione coi dati di un solo osservatorio dell'azimut del luogo della superficie terrestre dove s'ebbe il principio di un moto sismico. Mileto, 1911. f. v.
- LOVISATO D. — Note di paleontologia miocenica della Sardegna. Specie nuove di Clypeaster e di Amphiope. (Estr. dalla « Palaeontographia Italica », vol. XVII). Pisa, 1911. 4°.
- MARIÉ G. — Dénivellations de la vie et oscillations des véhicules de Chemins de fer. Complément théoriques. Études diverses. (Estr. des « Annales des mines », an. 1911). Paris, 1911. 8°.
- MARIÉ G. — Limites des flexibilité des ressorts et limites de vitesse du matériel des chemins de fer. (Estr. des « Mém. de la Soc. des Ingénieurs Civils de France », 1911). Paris, 1911. 4°.
- MASSINI L. — Reazione di A. Wassermann e suo valore in semeiologia clinica. Studio critico e sperimentale. Genova, 1911.
- Memorial volume of scientific Papers. (University of Saint Andrews five hundredth Anniversary). Edinburgh, 1911. 8°.
- MIRINNY L. — Pantosynthèse. Note sur les radiations. Paris, 1911. 8°.
- Onoranze alla memoria di Michele Stefano De Rossi in Rocca di Papa; 30 agosto 1910. (Società Sismologica Italiana). Modena, 1911. 8°.
- ORTH JOH. — Bericht über das Leichenhaus des Charité-Krankenhauses für das Jahr 1910. (Sonder-Abdr. aus den « Charité-Annalen ». XXXV, Jahrg.) Berlin, 1911. 8°.
- ORTH G. — Diagnostica anatomo-patologica. Torino, 1911. 8°.

- PARONA C. F. — Giorgio Spezia. (Estr. dall' « Annuario della R. Università di Torino », an. 1911-1912). Torino, 1911. 8°.
- PARROZZANI A. — Di taluni ibridi naturali degli agrumi. (Estr. dagli « Annali della R. Staz. di Agrumicoltura e frutticoltura », vol. I). Acireale, 1911, 8°.
- SALMOJRAGHI FR. — Saggi di fondo di mare raccolti dal R. Piroscapo « Washington » nella Campagna idrografica del 1882. Nota 2ª postuma. (Estr. dai « Rend. del R. Ist. Lomb. di sc. lett. ed arti », vol. XLIV). Milano, 1911. 8°.
- SAVASTANO L. — Di taluni ibridi naturali degli agrumi. (Estr. dagli « Ann. della R. Staz. di Agrumicoltura e frutticoltura », vol. I). Acireale, 1911. 8°.
- SPEKTORSKIJ E. — Problema soxialenøj fisiki b XVII stoljetii. Tom xerveij. Novoe mirovoxxrjenie i novaia teoria nauki. Varnava, 1910. 8°.
- TARAMELLI T. — Il nubifragio Valtellinese dello scorso agosto. (Estr. dai « Rend. del R. Ist. Lomb. », vol. XLIV). Milano, 1911. 8°.
- VENTURI AD. — Quarta campagna gravimetrica in Sicilia nel 1906. (Estr. dai « Rend. d. R. Accad. dei Lincei », Cl. sc. fis., vol. XVIII). Roma, 1909. 8°.
- Seduta del 3 marzo 1912.*
- DE BLASIO A. — Contributo allo studio della Mammalogia fossile dell'Italia meridionale. Napoli, 1911. 8°.
- DE BLASIO A. — Intorno all'officina litica di Sora. Napoli, 1912. 8°.
- DE TONI G. B. — Edoardo Bornet (1828-1911). (Estr. dalla « Nuova Notarisia », XXIII, 1912). Padova, 1912. 8°.
- EREDIA F. — Tripolitania e Cirenaica, climatologia di Tripoli e Bengasi. Studio, con prefazione di Luigi Palazzo. (Minist. affari esteri). Roma, 1912. 8°.
- Encyclopaedia Britannica (the) a Dictionary of arts, sciences, literature and general information. Eleventh Edition, vol. I-XXIX. Cambridge, 1911. 4°.
- EULERI LEONH. — Opera omnia. Series I, vol. I; Series III, vol. III. Lipsiae, 1911.
- GIUFFRIDA RUGGERI V. — L'uomo come specie collettiva. Discorso. Napoli, 1912. 8°.
- LORIA A. — La synthèse économique; étude sur les lois du revenu. Version française de Camille Monnet. Paris, 1911. 8°.
- MELI R. — Notizie di una zanna e di altri resti elefantini fossili descritti da Giambattista Passeri nel 1759, oggi conservati nella Biblioteca Oliveriana di Pesaro. (Estr. dal « Bollett. della Società Geologica Ital. », vol. XXX). Roma, 1911. 8°.
- NIJLAND A. A. — De Kometen 1911 C, F. en G. Utrecht, 1911. 8°.
- PELLAT S. — Notice bibliographique sur les travaux de Henri Pellat. Paris, s. d. 8°.
- PIROTTA R. — Hanno le piante organi dei sensi? (Estr. dagli « Atti della Soc. Ital. per il progresso delle scienze », 1911). Roma, 1912. 8°.
- PRYM F. — Theorie der Prym'schen Funktionen erster Ordnung im Anschluss an die Schöpfungen Riemann's. Leipzig, 1911. 4°.
- ROST G. — Theorie der Prym'schen Funktionen erster Ordnung im Anschluss an die Schöpfungen Riemann's. Leipzig, 1911. 4°.
- SALVADORI R. — Elementi di Chimica generale, inorganica-organica. III edizione. Firenze, 1912. 8°.
- ZAPALOWIEZ H. — Conspectus florae Galliciae criticus, vol. III. W. Krakowie, 1911. 8°.



